0674CH06

६ क्षेत्रपरिधिः क्षेत्रफलं च

६.१ परिमितिः

यदा वयं क्षेत्राणां विषये आलोचयामः, तदा तेषां क्षेत्राणां परिमापस्य विषये अपि विचारं कुर्मः। एषः परिमापः परिसीमा इति उच्यते। परिसीमा इत्युक्ते किम्? इतोऽपि स्पष्टतया अवगच्छामः!

यदि भवन्तः कस्यापि क्षेत्रस्य एकस्माद् बिन्दोः आरभ्य तस्य रेखाखण्डैः सह चलन्ति, तर्हि पुनः तमेव बिन्दुं प्राप्नुवन्ति। अनेन प्रकारेण भवन्तः तस्य क्षेत्रस्य एकं सम्पूर्णं भ्रमणं कुर्वन्ति। कस्यापि क्षेत्रस्य बाह्यसीमायाः एतद् दूरत्वं भवति तस्य परिसीमा। एषा परिसीमा क्षेत्रमितिः इत्यपि उच्यते। उदाहरणार्थं बहुभुजः अस्ति, रेखाखण्डैः निर्मितम् एकं बद्धक्षेत्रम्। तर्हि तस्य परिसीमा भवति = तस्य सर्वेषां बाहूनां दैर्घ्यस्य योगफलं नाम तस्य बाह्यसीमायाः सम्पूर्णं दूरत्वम्।

बहुभुजस्य परिसीमा = तस्य सर्वेषां बाहूनां दैर्घ्यस्य योगफलम्।

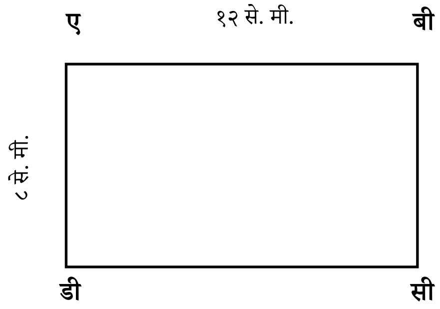
इदानीम् आयतक्षेत्रस्य, वर्गक्षेत्रस्य, त्रिभुजस्य च परिसीमां निर्धारयितुं तस्य गाणितीयसूत्राणाम् पुनरवलोकनं कुर्मः।

आयतक्षेत्रस्य परिसीमा

इदानीं वयं एबीसीडी इति नाम्ना चिह्नितस्य एकस्य आयतक्षेत्रस्य उपरि विचारं कुर्मः। अस्य दैर्घ्यः = १२ सेमी एवञ्च विस्तारः = ९ सेमी इति अस्ति। अस्य आयतक्षेत्रस्य परिसीमा का भवति ?

आयतक्षेत्रस्य परिसीमा = तस्य चतुर्णां बाहूनां दैर्घ्यानां योगफलम्

= ए बी + बी सी + सी डी + डी ए



© NCERT not to be republished

= ए बी + बी सी + ए बी + बी सी

= २ × ए बी + २ × बी सी

= २ × (ए बी + बी सी)

= २ × (१२ सेमी + ८ सेमी)

= २ × (२० सेमी)

= ४० सेमी।

> आयतक्षेत्रस्य विपरीतबाहूनां दैर्घ्यः सर्वदा समानः भवति।
> अतः, एबी = सीडी
> तथा एडी = बीसी

अस्माद् उदाहरणाद् वयं दृष्टवन्तः यत् -

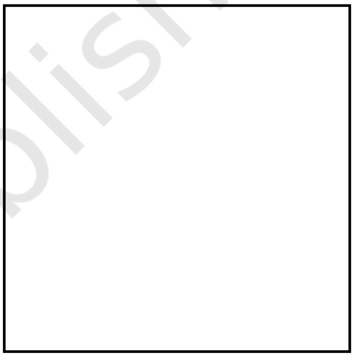
आयतक्षेत्रस्य परिसीमा = दैर्घ्यः + विस्तारः + दैर्घ्यः + विस्तारः

अर्थात् आयतक्षेत्रस्य परिसीमा भवति = २ × (दैर्घ्यः + विस्तारः)

वस्तुतः आयतक्षेत्रस्य परिसीमा तस्य दैर्घ्यविस्तारयोः योगफलस्य द्विगुणिता भवति।

वर्गक्षेत्रस्य परिसीमा

१ मी.



देवजितः १ मी. दैर्घ्ययुक्तम् एकं वर्गाकारचित्रं परितः एकं वर्णपट्टिकां (टेप्) योजयितुम् इच्छति, यथा दर्शितम् अस्ति। अस्याः वर्णपट्टिकायाः कृते कियद्दैर्घ्यः अपेक्षितः भवति ?

यतो हि देवजीतः सम्पूर्णवर्गाकारचित्रं परितः वर्णपट्टिकां योजयितुम् इच्छति अतः तेन तस्य वर्गाकारचित्रस्य परिसीमा ज्ञातव्या भवति।

तस्माद् वर्णपट्टिकायाः कृते अपेक्षितः दैर्घ्यः = वर्गक्षेत्रस्य परिसीमा

= वर्गक्षेत्रस्य चतुर्णां बाहूनां योगफलम्

= १ मी + १ मी + १ मी + १ मी = ४ मी

वयं जानीमः यत् वर्गक्षेत्रस्य चतुर्णामपि बाहूनां दैर्घ्यः समानः भवति। अतः चतुर्वारम् अस्य दैर्घ्यस्य योगकरणस्थाने वयं तस्य एकस्य भुजस्य दैर्घ्यं ४ इत्यनेन गुणनं कर्तुं शक्नुमः ।

अतः वर्णपट्टिकायाः कृते अपेक्षितः दैर्घ्यः = ४ × १ मी = ४ मी

अनेन उदाहरणेन वयं पश्यामः यत्

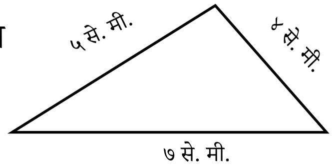
वर्गक्षेत्रस्य परिसीमा = ४ × तस्य एकस्य भुजस्य दैर्घ्यः

वस्तुतः वर्गक्षेत्रस्य परिसीमा तस्य एकस्य भुजस्य दैर्घ्यस्य चतुर्गुणिता भवति।

© NCERT not to be republished

त्रिभुजस्य परिमापः

चिन्तयन्तु, एकस्य त्रिभुजस्य त्रयः भुजाः सन्ति। तस्य एकस्य बाहोः दैर्घ्यः अस्ति ४ सेमी, अन्यस्य दैर्घ्यः अस्ति ५ सेमी तथा तृतीयस्य अस्ति ७ सेमी। अस्य परिसीमा का भवति?



अस्य त्रिभुजस्य परिसीमा = ४ सेमी + ५ सेमी + ७ सेमी
= १६ सेमी

कस्यापि त्रिभुजस्य परिसीमा = तस्य त्रयाणां बाहूनां दैर्घ्यानां योगफलम्

उदाहरणम् : आक्षी आयताकारस्य उत्पीठिकायाः आवारकं परितः प्रान्ताभरणं योजयितुम् इच्छति। उत्पीठिकायाः आवारकस्य दैर्घ्यः ३ मी, विस्तारश्च २ मी इति अस्ति। तर्हि प्रान्ताभरणस्य कृते कियद्दैर्घ्यः अपेक्षितः अस्ति इति अन्विष्यन्तु।

समाधानम्

आयताकार-उत्पीठिकायाः आवारकस्य दैर्घ्यः = ३ मी आयताकार उत्पीठिकायाः आवारकस्य विस्तारः = २ मी

आक्षी आवारकं परितः प्रान्ताभरणं योजयितुम् इच्छति।

अतः प्रान्ताभरणस्य कृते अपेक्षितः दैर्घ्यः = आयताकारस्य आवारकस्य परिसीमा

इदानीम्, आयताकारस्य आवारकस्य परिसीमा = २ × (दैर्घ्यः+ विस्तारः)

= २ × (३ मी + २ मी) = २ × ५ मी = १० मी।

अतः उत्पीठिकायाः आवारकं परितः योजयितुं १० मी-परिमितं प्रान्ताभरणम् आवश्यकम्।

उदाहरणम् - उषा एकं वर्गाकारम् उद्यानं परितः त्रिवारं भ्रमणं करोति। अस्य एकप्रान्तस्य दैर्घ्यः अस्ति ७५ सेमी। तया कियद्दूरत्वम् अतिक्रान्तम् इति अन्विष्यन्तु।

समाधानम्

वर्गाकार-उद्यानस्य परिसीमा
= ४ × क्षेत्रस्य एकप्रान्तस्य दैर्घ्यः
= ४ × ७५ मी = ३०० मी

उषा इत्यनया एकवारेण अतिक्रान्तं दूरत्वम् = ३०० मी

अतः तया त्रिवारेण अतिक्रान्तं सम्पूर्णं दूरत्वम्
= ३ × ३०० मी = ९०० मी

© NCERT not to be republished

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. रिक्तस्थानानि पूरयन्तु।

क. आयतक्षेत्रस्य परिसीमा = १४ सेमी; विस्तारः = २ सेमी; दैर्घ्यः = ?

ख. वर्गक्षेत्रस्य परिसीमा = २० सेमी; तस्य एकस्य भुजस्य दैर्घ्यः = ?

ग. आयतक्षेत्रस्य परिसीमा = १२ मी; दैर्घ्यः = ३ मी; विस्तारः = ?

२. तारखण्डेन निर्मितम् एकम् आयतक्षेत्रम् अस्ति। अस्य दैर्घ्यः अस्ति ५ सेमी इति तथा विस्तारः अस्ति ३ सेमी इति। यदि तारः सरलः भवति, ततः तं वक्रं कृत्वा वर्गक्षेत्रं निर्मीयते, तर्हि तस्य वर्गक्षेत्रस्य एकस्य भुजस्य दैर्घ्यः कः भविष्यति?

३. त्रिभुजस्य परिसीमा ५५ सेमी इति अस्ति। तस्य एकस्य भुजस्य दैर्घ्यः अस्ति २० सेमी इति तथा अन्यस्य दैर्घ्यः अस्ति १४ सेमी इति। तर्हि तस्य तृतीयभुजस्य दैर्घ्यः किं भवति इति वदन्तु।

४. एकस्य आयताकार-उद्यानस्य दैर्घ्यः १५० मी इति अस्ति तथा विस्तारः अस्ति १२० मी इति। यदि प्रतिमीटर् इत्यस्य कृते चत्वारिंशत् (४०) रूप्यकाणि व्ययितानि भवन्ति, तर्हि उद्यानं परितः अवरोधकनिर्माणे कियान् व्ययः भवति ?

५. एकः ३६ सेमी दीर्घः तारखण्डः अस्ति। तस्य प्रत्यकस्य भुजस्य दैर्घ्यः कः भवति इति चिन्तयन्तु, यदि तेन निर्मितं क्षेत्रं भवति -

(क) एकं वर्गक्षेत्रम्,

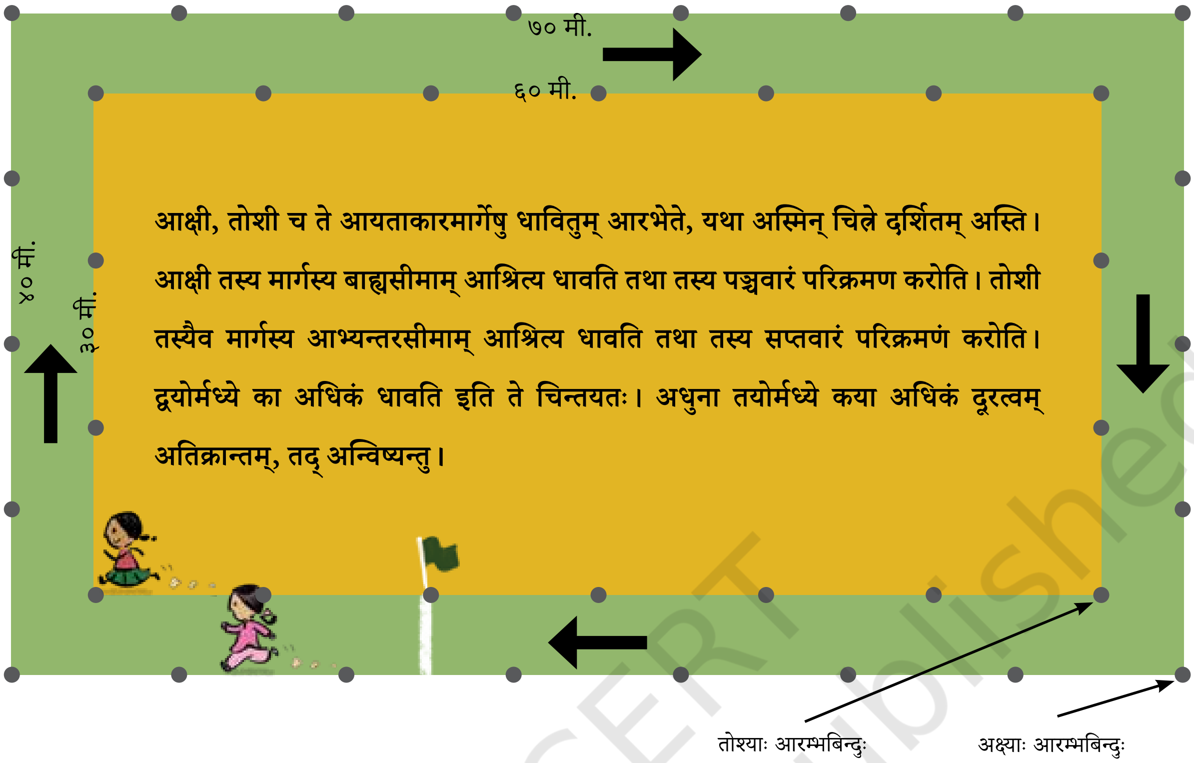
(ख) एकः समबाहुत्रिभुजः, तथा

(ग) समानदैर्घ्यस्य एकः षडभुजः (यस्य क्षेत्रस्य षड् भुजाः सन्ति) ?

६. कस्यचित् कृषकस्य एकः आयताकार-भूखण्डः अस्ति। तस्य दैर्घ्यः अस्ति २३० मी इति तथा विस्तारः अस्ति १६० मी इति। कृषकः तं भूखण्डं तिसृषु पङ्क्तिषु रज्जुद्वारेण वेष्टयितुम् इच्छति। तर्हि अस्य कृते कियद्दैर्घ्यविशिष्टरज्जुः आवश्यकः?

not to be republished © NCERT

माथा पच्ची !



तत्र प्रत्येकः मार्गः आयताकारः अस्ति। आक्षी इत्यस्याः मार्गस्य दैर्घ्यः अस्ति ७० मी इति तथा विस्तारः अस्ति ४० मी इति। अतः अनेन मार्गेण एकवारेण अतिक्रान्तदूरत्वं भवति २२० मी इति। अर्थात्, २ × (७०+४०) मी = २२० मी इति। आक्षी इत्यनया एकवारेम एतद् दूरत्वम् अतिक्रान्तम्।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. पञ्चवारेण आक्षी इत्यनया कियद्दूरत्वम् अतिक्रान्तम् इति ज्ञातव्यम्।

२. सप्तवारेण तोशी इत्यनया कियद्दूरत्वम् अतिक्रान्तम् इति ज्ञातव्यम्। द्वयोर्मध्ये कया अधिकं दूरत्वम् अतिक्रान्तम् ?

३. यथा निर्देशितम् अस्ति तदनुसारं स्थानानां विषये चिन्तयन्तु तथा तानि चिह्नितानि कुर्वन्तु -

(क) यदा आक्षी २५० मी-दूरत्वम् अतिक्रमिष्यति, तदा सा कस्मिन् स्थाने भविष्यति इति तत्स्थानं क इति नाम्ना निर्देशयतु।

(ख) यदा आक्षी ५०० मी-दूरत्वम् अतिक्रमिष्यति, तदा सा कस्मिन् स्थाने भविष्यति इति तत्स्थानं ख इति नाम्ना निर्देशयतु।

(ग) इदानीम्, आक्षी १००० मी-दूरत्वम् अतिक्रान्तवती। सा स्वमार्गम् आश्रित्य तस्य कति परिक्रमां कृतवती ? तत्स्थानं ग इति नाम्ना निर्देशयतु।

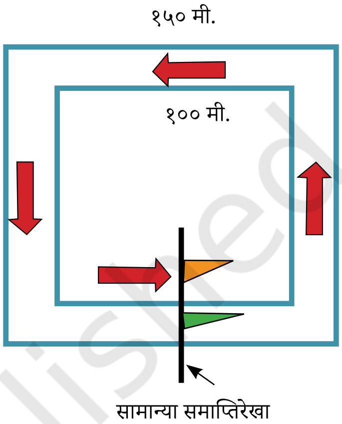
(घ) यदा तोशी २५० मी-दूरत्वम् अतिक्रमिष्यति, तदा सा कस्मिन् स्थाने भविष्यति इति तत्स्थानं अ इति नाम्ना निर्देशयतु।

© NCERT not to be republished

(ङ) यदा तोशी ५०० मी-दूरत्वम् अतिक्रमिष्यति, तदा सा कस्मिन् स्थाने भविष्यति इति तत्स्थानं आ इति नाम्ना निर्देशयतु।

(च) इदानीम्, तोशी १००० मी-दूरत्वम् अतिक्रान्तवती। सा स्वमार्गम् आश्रित्य तस्य कति परिक्रमां कृतवती? तत्स्थानं इ इति नाम्ना निर्देशयतु।

गभीरानुसन्धानम् - स्पर्धासु प्रायः सर्वेषां धावकानां कृते एका सामान्य-समाप्ति-रेखा भवति। अत्र द्वौ वर्गाकारौ धावनमार्गौ स्तः यत्र आभ्यन्तर-मार्गस्य दैर्घ्यः अस्ति १०० मी इति तथा बाह्यमार्गस्य दैर्घ्यः अस्ति १५० मी इति। चित्रे उभयोः धावकयोः कृते सामान्य-समाप्ति-रेखा ध्वजेण दर्शिता भवति। इदं ध्वजद्वयं मार्गस्य एकस्मिन् पार्श्वे मध्ये स्थितं भवति।

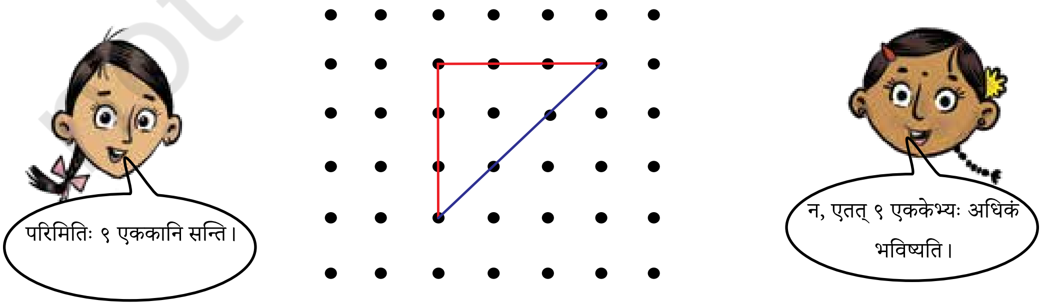


यदि आहत्य ३५० मी-दूरत्वं धावनीयं, तर्हि एतयोः मार्गयोः द्वयोः धावकयोः आरम्भस्थानं किम् भवति इति अस्माभिः ज्ञातव्यं, येन ३५० मी-दूरत्वस्य अतिक्रमणात् परं उभयः एव अन्तिमरेखां प्राप्नुयात्। आभ्यन्तर-मार्गे धावकस्य आरम्भस्तानं क इति नाम्ना निर्देशयन्तु तथा बाह्य-मार्गे धावकस्य आरम्भस्थानं ख इति नाम्ना निर्देशयन्तु।

अनुमान्तु परीक्षन्तु च

एकं स्थूलपत्रं वृत्तपत्रं वा स्वीकुर्वन्तु। भिन्नभिन्नविधैः पत्रं कर्तयित्वा केषाञ्चन याद्दच्छिकानाम् आकाराणां निर्माणं कुर्वन्तु। तत्र प्रत्येकस्य आकारस्य परिसीमायाः सम्पूर्णदैर्घ्यस्य अनुमानं कुर्वन्तु। ततः मापिकायाः दीर्घपट्टिकायाः वा उपयोगेन प्रत्येकस्य आकारस्य परिसीमां मापयित्वा, स्वानुमानं सत्यापयन्तु।

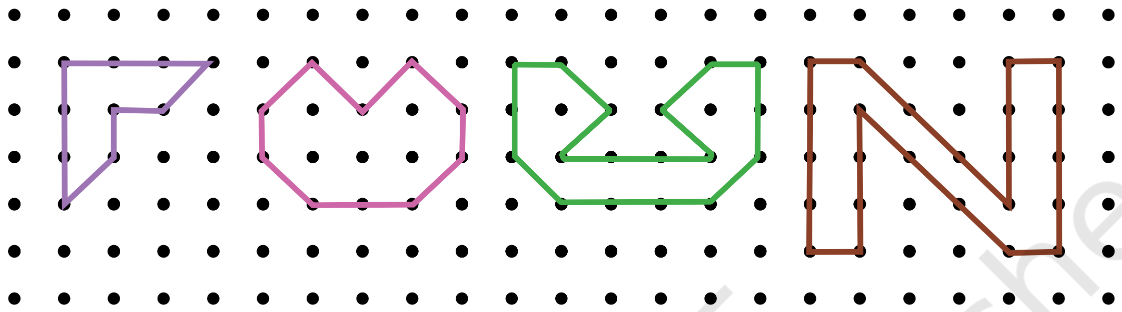
आक्षी कथयति यत् अस्य त्रिभुजस्य परिसीमा अस्ति ९ एककम् इति। परन्तु तोशी वदति यद् अस्य परिसीमा ९ एककम् इति भवितुम् नार्हति, सा अवश्यमेव तस्माद् अधिकं भविष्यति। भवतां किं मतम् अस्ति ?



© NCERT not to be republished

अस्मिन् चित्रे भिन्न-भिन्न-दैर्घ्य-युक्ताः रेखाः सन्ति। तेषु रक्तरेखानां नीलरेखायाः च दैर्घ्यं मापयन्तु। तेषां दैर्घ्यः समानः अस्ति वा ? वयं रक्तरेखां सरलरेखा इति वदामः तथा नीलरेखां तिर्यग्-रेखा इति वदामः। अतः अस्य त्रिभुजस्य परिसीमा भवति = षड् (६) सरलरेखानां दैर्घ्यः + तिसृणां (३) तिर्यग्-रेखानां दैर्घ्यः। वयं संक्षेपेण एवं लिखितुं शक्नुमः (६ + ३) एककम् इति।

सरलरेखानां तिर्यग्-रेखानां च दैर्घ्यदृष्ट्या अधो दत्ताकाराणां परिसीमां निर्णयन्तु।



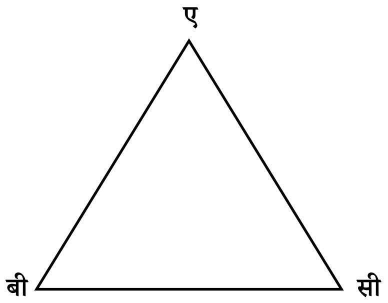
बहुभुजस्य परिसीमा -

वर्गक्षेत्रमिवयेषु आकृतिषु प्रत्येकस्य भुजस्य दैर्घ्यः समानः अस्ति एवञ्च प्रत्येककोणस्य परिमापः समानः भवति, तादृशानि क्षेत्राणि समबाहुयुक्तक्षेत्राणि इति उच्यन्ते। वयं प्रथमाध्याये 'मूलभूत-आकाराणां ज्ञानम्' #१ इत्यत्र बहुभुजानां विषये क्रमशः अध्ययनं कृतवन्तः। समबाहु-त्रिभुजः (यत्र त्रिभुजस्य त्रयाणां बाहूनां दैर्घ्यः, प्रत्येककोणस्य च परिमापः समानः भवति।) इति बहुभुजस्य एकम् उदाहरणम् अस्ति। तथैव समबाहु-पञ्चभुजः (यत्र पञ्चभुजस्य पञ्चानां बाहूनां दैर्घ्यः, प्रत्येककोणस्य च परिमापः समानः भवति।) इत्यादि।

समबाहु-त्रिभुजस्य परिसीमा

वयं जानीमः यत् कस्यापि त्रिभुजस्य परिसीमा = तस्य त्रयाणां बाहुदैर्घ्यानां योगफलम् इति।

अनेनैव नियमेन वयं समबाहु-त्रिभुजस्यापि परिसीमां निर्णेतुं शक्नुमः।



समबाहु-त्रिभुजस्य परिसीमा

= एबी + बीसी + एसी = एबी + एबी + एबी

= ३ × एकस्य भुजस्य दैर्घ्यः

समबाहु-त्रिभुजस्य वर्गक्षेत्रस्य च मध्ये का समानता अस्ति ?

© NCERT not to be republished

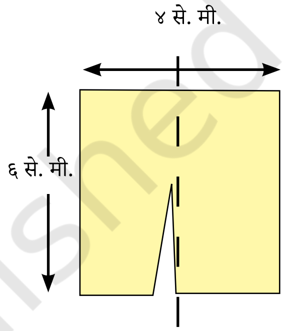
- परितः विद्यमानानां विभिन्नाकारयुक्तानां वस्तूनाम् अन्वेषणं कृत्वातेषां परिसीमां जानन्तु। अपि च अन्येषां बहुभुजानां विषये अपि स्वज्ञानं वर्धयन्तु।

शिक्षकान् प्रति

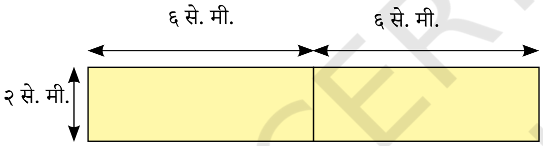
बहुभुजानां विषये अधिकाधिकं चर्चां कुर्वन्तु तथा च बहुभुजस्य परिसीमां निर्धारयितुं तस्य सामान्यसूत्रं कल्पयितुं छात्रान् प्रोत्साहयन्तु।

विभाजयन्तु पुनःसंयोजयन्तु च

६ सेमी × ४ सेमी - परिमापयुक्तः आयतकारः कर्गदखण्डः द्वयोः समानखण्डयोः कर्तितः अस्ति। एतौ द्वौ खण्डौ भिन्नविधैः संयोजयितुं शक्यते।



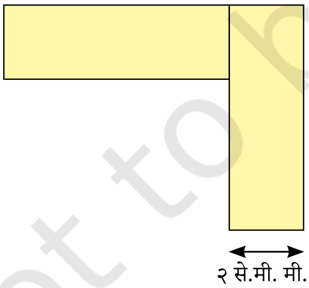
क.



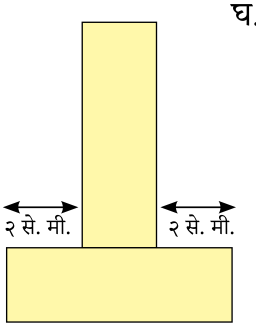
दृष्टान्तो यथा, (क)व्यवस्थायां अस्य परिसीमा अस्ति २८ सेमी इति।

- अधो दत्तासु अन्यव्यवस्थासु प्रत्येकक्षेत्रस्य परिसीमा (क्षेत्रस्य बाह्यसीमायाः सम्पूर्णः दैर्घ्यः) ज्ञातव्या।

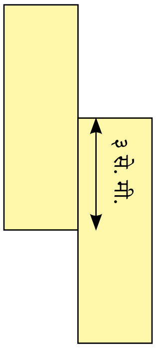
ख.



ग.



घ.



- २२ सेमी-परिसीमाविशिष्टस्य क्षेत्रस्य निर्माणार्थं तौ द्वौ खण्डौ यथार्थरूपेण संयोजयन्तु।

© NCERT not to be republished

६.२ क्षेत्रफलम्

वयं पूर्वकक्षायां क्षेत्राणां (नियमितानाम् अनियमितानां च) क्षेत्रफलस्य विषये पठितवन्तः। तस्य कांश्चन प्रमुखविषयान् स्मरामः।

परिवेष्टित-आकृतिभिः आवृत-क्षेत्रस्य परिमाणं तस्य क्षेत्रफलम् इति उच्यते।

पूर्वकक्षायां, वयं वर्गाकार-ग्रीड्-पेपर् इत्यस्य उपयोगेन आयतक्षेत्रस्य वर्गक्षेत्रस्य च क्षेत्रफलं निर्णेतुं सूत्रं प्राप्तवन्तः। भवद्भिः स्मर्तुं शक्यते वा?

वर्गक्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् = _ _ _ _ _ _ _ _ _	आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् = _ _ _ _ _ _ _ _

शिक्षकान् प्रति

ग्रिड्-पत्राणि उपयुज्य आयताकारक्षेत्रस्य वर्गक्षेत्रस्य च क्षेत्रफलनिर्णयार्थं छात्रान् सूत्रं स्मारयतु। छात्रेभ्यः वर्गाकार-ग्रीड्-पत्राणि दत्वा सूत्रं कल्पयितुं तेषां साहाय्यं करोतु।

एतैः विचारैः सम्बद्धाः काश्चन वास्तविक-समस्याः पश्याम।

उदाहरणम् - एकस्य तलस्य दैर्घ्यः ५ मी इति अस्ति तथा विस्तारः अस्ति ४ मी इति। तस्य उपरि ३ मी-दैर्घ्यविशिष्टः एकः वर्गाकारः कटः स्थापितः अस्ति। तलस्य तद्भागस्य क्षेत्रफलम् अन्विष्यन्तु यः भागः कटेन आवृतः नास्ति।

समाधानम् -

तलस्य दैर्घ्यः = ५ मी.

तलस्य विस्तारः = ४ मी.

तलस्य क्षेत्रफलम् = दैर्घ्यः × विस्तारः = ५ मी. × ४ मी. = २० वर्ग मी.

वर्गाकारकटस्य दैर्घ्यः = ३ मी.

कटस्य क्षेत्रफलम् = दैर्घ्यः × दैर्घ्यः = ३ मी. × ३ मी. = ९ वर्ग मी.

अतः, कटेन आवृततलस्य क्षेत्रफलम् अस्ति ९ वर्ग मी. इति।

तस्माद् तलस्य तद्भागः, यः कटेन आवृतः नास्ति, तस्य क्षेत्रफलम् अस्ति -

तलस्य क्षेत्रफलम् - कटेन आवृततलस्य क्षेत्रफलम् = २० वर्ग मी. - ९ वर्ग मी. = ११ वर्ग मी.

उदाहरणम् - एकः भूमिखण्डः अस्ति, यस्य दैर्घ्यः १२ मी इति अस्ति तथा विस्तारः अस्ति १० मी इति। अस्य चतुर्षु कोणेषु ४ मी-दैर्घ्यविशिष्टाः चत्वारः पुष्प-शय्याः सन्ति। तस्य भूमिखण्डस्य अवशिष्टभागस्य क्षेत्रफलम् अन्विष्यन्तु।

© NCERT not to be republished

समाधानम् -

भूमिखण्डस्य दैर्घ्यः = १२ मी.

भूमिखण्डस्य विस्तारः = १० मी.

भूमिखण्डस्य क्षेत्रफलम् = दैर्घ्यः × विस्तारः = १२ मी. × १० मी. = १२० वर्ग मी.

वर्गाकारपुष्पशय्यानां प्रत्येकस्य दैर्घ्यः = ४ मी.

एकस्याः पुष्पशय्यायाः क्षेत्रफलम् = दैर्घ्यः × दैर्घ्यः = ४ मी. × ४ मी. = १६ वर्ग मी.

अतः, चतुर्णां पुष्पशय्यानां सम्पूर्णं क्षेत्रफलम् = ४ × १६ वर्ग मी. = ६४ वर्ग मी.

तस्माद् तस्य भूमिखण्डस्य अवशिष्टभागस्य क्षेत्रफलम् - सम्पूर्णभूमिखण्डस्य क्षेत्रफलम् - चतुर्णां पुष्पशय्यानां सम्पूर्णं क्षेत्रफलम् = १२० वर्ग मी. - ६४ वर्ग मी. = ५६ वर्ग मी.

एतत् निश्चिन्वन्तु

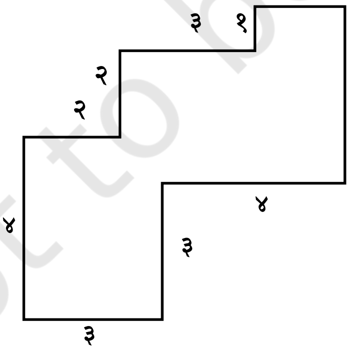
१. एकस्य आयताकार-उद्यानस्य क्षेत्रफलम् अस्ति ३०० वर्ग मी. इति। तस्य दैर्घ्यः अस्ति २५ मी. इति। तर्हि तस्य विस्तारः कः अस्ति ?

२. आयताकार-भूमिखण्डस्य दैर्घ्यः ५०० मी. इति अस्ति तथा विस्तारः २०० मी. इति अस्ति। यदि प्रतिवर्गमीटर्-भूखण्डम् आवरयितुं अष्टरूप्यकाणि व्ययितानि भवन्ति, तर्हि सम्पूर्णं भूमिखण्डम् आवरयितुं कति रूप्यकाणि व्ययितानि भविष्यन्ति ?

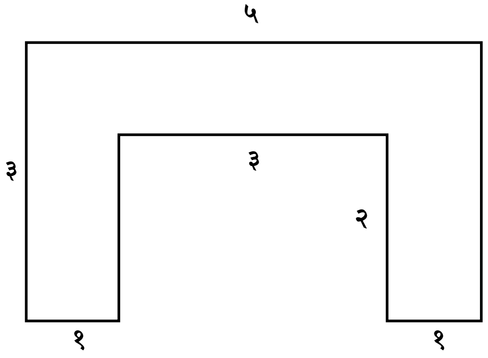
३. आयताकारस्य नारिकेलवनस्य दैर्घ्यः अस्ति १०० मी. इति तथा तस्य विस्तारः अस्ति ५० मी. इति। यदि प्रत्येकस्य नारिकेल-वृक्षस्य कृते २५ वर्गमीटर्-स्थानम् आवश्यकम् अस्ति, तर्हि अस्मिन् वने अधिकाधिकान् कति वृक्षान् रोपयितुं शक्यते ?

४. अधोदत्ताः आकृतीः विभज्य आयतक्षेत्राणि निर्मान्तु तथा तेषां क्षेत्रफलम् अन्विष्यन्तु। (सर्वे परिमापाः मीटर् इति एककेन दीयन्ते)

क.



ख.



एतत् निश्चिन्वन्तु

भवतां पाठ्यपुस्तकस्य अन्ते दत्तानि ट्यान्ग्राम-खण्डानि कर्तयन्तु।

१. समानक्षेत्रफलविशिष्टानि कति खण्डानि भवितुम् अर्हन्ति इति अन्विष्य तस्य क्षेत्रफलस्य ज्ञानं कुर्वन्तु।

२. **सी** इत्याकारस्य तुलनया **डी** इत्याकारस्य क्षेत्रफलं कियत् अधिकं भवति? **सी, डी, ई** इत्येतेषाम् आकाराणां मध्ये कः सम्बन्धः अस्ति?

३. कस्य आकारस्य क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति, **डी** उत **एफ्** ? स्वस्य उत्तरस्य स्वपक्षे तर्कं ददतु।

४. कस्य आकारस्य क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति, **एफ्** उत **जी** ? स्वस्य उत्तरस्य स्वपक्षे तर्कं ददतु।

५. **जी** इत्याकारस्य तुलनया **ए** इत्याकारस्य क्षेत्रफलं किम् अस्ति? तत् **जी** इत्याकारस्य क्षेत्रफलस्य द्विगुणम् अस्ति वा ? चतुरिगुणम् अस्ति वा?

सूत्रम् - ट्यान्ग्राम-खण्डेषु विभिन्नाकारान् एकम् अन्यस्य उपरि स्थापयित्वा, वयं ज्ञातुं शक्नुमः यत् **ए** एवञ्च **बी** इत्याकारयोः क्षेत्रफलं समानम् अस्ति। तथैव **सी** एवञ्च **ई** इत्याकारयोः क्षेत्रफलमपि समानम् अस्ति। अपि च **सी** तथा **ई** इत्याकारौ मिलित्वा **डी** इत्याकारं पूर्णरूपेण आच्छादयितुं शक्नुतः। अर्थात् **डी** इत्याकारस्य क्षेत्रफलं **सी** अथवा **ई** इत्यस्य द्विगुणम् अस्ति।

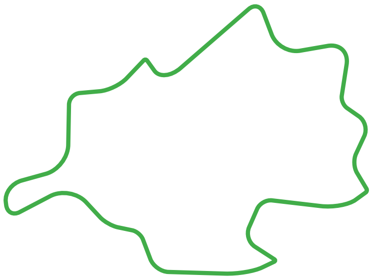
६. एतानि सप्त खण्डानि उपयुज्य एकस्य वर्गक्षेत्रस्य निर्माणं कुर्वन्तु। अधुना **सी** इत्याकारस्य क्षेत्रफलस्य स्वापेक्षे सम्पूर्णवर्गक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं निर्णेतुं शक्यते वा?

७. एतानि सप्त खण्डानि उपयुज्य एकस्य आयतक्षेत्रस्य निर्माणं कुर्वन्तु। अधुना **सी** इत्याकारस्य क्षेत्रफलस्य स्वापेक्षे सम्पूर्णस्य आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलस्य निर्णयं कुर्वन्तु।

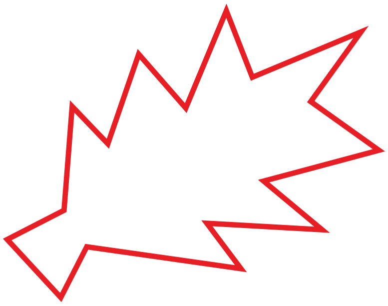
८. किम् एतेषां सप्तखण्डानाम् उपयोगेन निर्मितस्य आयतक्षेत्रस्य वर्गक्षेत्रस्य च परिसीमाः भिन्नाः सन्ति उत समानाः सन्ति? स्वस्य उत्तरं व्याख्यायताम्।

© NCERT not to be republished

अधो दत्ताकारान् ध्यानेन पश्यन्तु तथा तेषु कस्य क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति इति अनुमानं कुर्वन्तु।



क.



ख.

वयं वर्गाकारपत्रखण्डस्य आलेखपत्रस्य वा उपयोगेन कस्यापि क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं निर्णेतुं शक्नुमः। अस्य प्रत्येकस्य वर्गाकारक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं भवति १ एककम् × १ एककम् / १ वर्ग मी. इति। अधुना क्षेत्रफलनिर्णयार्थं एकस्मिन् पारदर्शकपत्रे अस्याकारस्य बाह्यरेखाम् अङ्कयन्तु। ततः तद् वर्गाकारपत्रखण्डस्य आलेखपत्रस्य वा उपरि स्थापयित्वा निम्नलिखितनिर्देशानाम् अनुसरणं कुर्वन्तु -

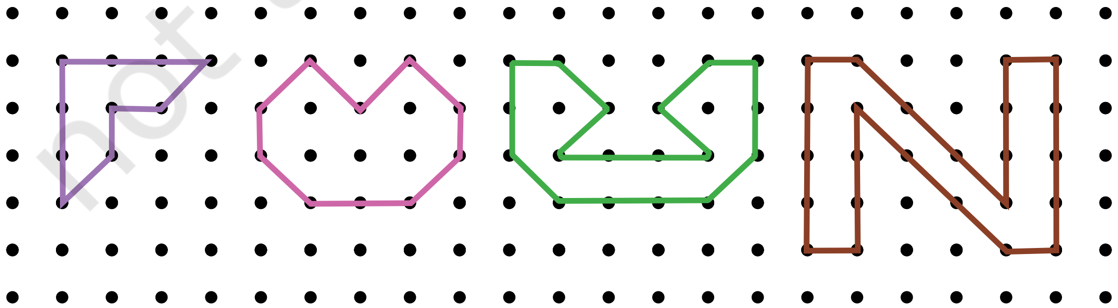
१. वयं वर्गाकारपत्रखण्डस्य आलेखपत्रस्य वा एकस्य लघुवर्गक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं १ वर्ग-एककम् इति स्वीकुर्मः।

२. यस्य वर्गक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं वर्गस्य अर्धभागादपि न्यूनम् अस्ति, तर्हि तत् त्यजन्तु।

३. यदि वर्गक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं वर्गस्य अर्धभागाद् अधिकम् अस्ति, तर्हि तत् १ वर्ग एककम्. इति गणयन्तु।

४. यदि वर्गक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं यथार्थतया वर्गस्य अर्धभागः भवति तर्हि तत् $\frac{१}{२}$ वर्ग एककम्. इति गणयन्तु।

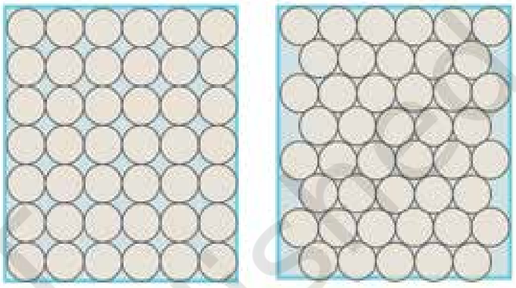
अधो दत्ताकाराणां क्षेत्रफलानि गणयन्तु।



एहि, अन्विषामः !

किमर्थं सामान्यतया वर्ग-एककेन क्षेत्रफलस्य परिमापः क्रियते ?

आलेख्यपत्रके एकं वृत्तं रचयत, यस्य व्यासः (विस्तारः) अस्ति 3-एककम् इति। इदानीं तत्रस्थवर्गक्षेत्राणि गणयित्वा अस्य वृत्ताकारक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं निर्णेतुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।



यथा भवन्तः पश्यन्ति, मध्ये अन्तरं विना वृत्तानि दृढतया पूर

एककरूपेण उपयुज्य

यथार्थतया क्षेत्रस्य क्षेत्रफलनिर्णयः कठिनं भवति। अत्र, समानाकारस्य आयतक्षेत्रद्वयं वृत्तैः भिन्नभिन्नविधिना पूरितम् अस्ति। प्रथमक्षेत्रे ४२ संख्याकानि वृत्तानि, द्वितीये च ४४ संख्याकानि वृत्तानि सन्ति।

भिन्नानि आकृतयः (त्रिभुजानि, आयतानि च) उपयुज्य प्रदत्तं स्थानं पूरयितुं प्रयतताम् (अतिव्याप्तिः, अन्तरं च विना) तथा च अन्यस्य आकारस्य अपेक्षया क्षेत्रम् अन्वेष्टुं वर्गाकारस्य आकारस्य उपयोगेन सम्बद्धान् गुणान् ज्ञातुं प्रयतताम्। क्षेत्रस्य मापनार्थं उपयोक्तुं चतुरं सर्वोत्तमं आकारं निर्मातुं बिन्दूनां सूचीं निर्दिशतु।

१. सम्पथस्य बहिर्भागे भूमितलस्य क्षेत्रफलं (वर्गमीटर्-एककेन) अन्विष्यन्तु।

२. भवतां विद्यालयस्य क्रीडाङ्गनस्य क्षेत्रफलम् (वर्गमीटर्-एककेन) अन्विष्यन्तु।

एहि, अन्विषामः !

गणित कथा

स्क्वेर्ड्-ग्रिड्-कागदस्य उपरि (१ वर्ग = १ वर्ग-एककं), बहुविध-आयतान् निर्मातु यथा भवान् कर्तुं शक्नोति, यस्याः दीर्घता, विस्तारः च एककानाम् सम्पूर्णसङ्ख्या अस्ति यथा आयतस्य क्षेत्रफलं २४ वर्ग-एककं भवति।

(क) कस्य आयतक्षेत्रस्य परिसीमा अधिका अस्ति ?

(ख) कस्य आयतक्षेत्रस्य परिसीमा न्यूनम् अस्ति ?

© NCERT not to be republished

(ग) यदि भवान्/भवती ३२ वर्ग-सेमी-क्षेत्रफलविशिष्टम् आयताकारक्षेत्रं स्वीकरोति, तर्हि भवतः/भवत्याः उत्तरं किम् भविष्यति ? कस्यापि क्षेत्रस्य दृष्ट्या, अधिकतमपरिसीमायुक्तस्य न्यूनतमपरिसीमायुक्तस्य च आयतक्षेत्रस्य पूर्वानुमानं कर्तुं शक्यते वा ? भवतः/भवत्याः उत्तरस्य स्वपक्षे कारणानि उदाहरणानि च ददातु।

६.३ त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्

एकस्मिन् कर्गदपत्रे एकम् आयतक्षेत्रम् अङ्कयित्वा तस्य विपरीतकोणद्वयमाश्रित्य एकां तीर्यक्-रेखाम् अभ्कयन्तु। ततः तां रेखाम् आश्रित्य तद् आयतक्षेत्रं कर्तयन्तु। भवन्तः इदानीं त्रिभुजद्वयं प्राप्तवन्तः।

तत् त्रिभुजद्वयम्, एकः अन्यस्य उपरि यथार्थरूपेण अध्यारोपितः वा इति परीक्षयन्तु। किं द्वयोः क्षेत्रफलं समानम् अस्ति ?

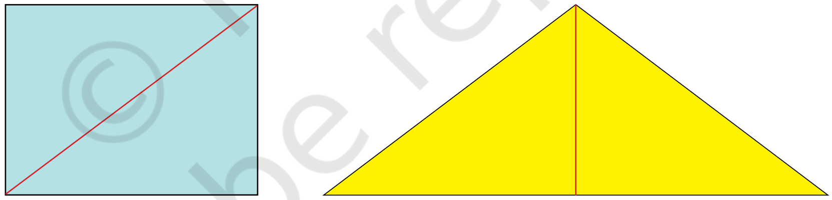
भिन्नभिन्न-दैर्घ्य-विस्तार-युक्तानि आयतक्षेत्राणि अङ्कयित्वा एतत् कार्यम् अनुवर्तयन्तु। तथैव भवन्तः वर्गक्षेत्रस्य विषये अपि एतत् परीक्षयितुं शक्नुवन्ति।

अस्माद् अभ्यासाद् भवद्भिः किमपि अनुमानं कर्तुं शक्यते वा ? तदत्र लिखन्तु।

____

____

इदानीं अधो दत्ताकारान् पश्यन्तु। किं पीतवर्णस्य त्रिभुजस्य अपेक्षया नीलवर्णस्य आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति, न्यूनमस्ति वा ? अथवा क्षेत्रफलं समानमस्ति वा? किमर्थं च?



किं नीलवर्णस्य आयतक्षेत्रस्य पीतवर्णस्य त्रिभुजस्य च मध्ये तथा तयोः क्षेत्रफलस्य मध्ये कोऽपि सम्बन्धः अस्ति? तदत्र लिखन्तु।

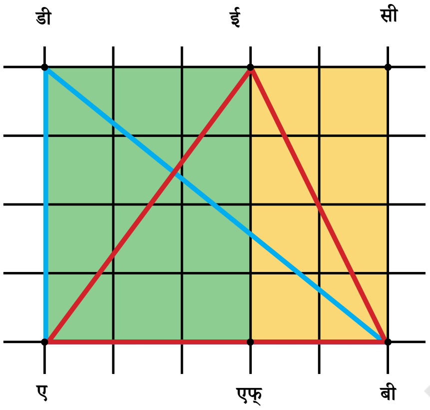
____

शिक्षकान् प्रति

आकाराणां विषये अनुमानं कर्तुं तथा स्वस्य पर्यवेक्षणानि स्वभाषया व्याख्यातुं छात्राणां कृते अवसरान् यच्छतु, येन क्रमेण सम्पूर्णवर्गेन एका सामान्यधारणा प्राप्यते। कक्षायां विकर्णस्य संज्ञां स्मारयन्तु।

ग्रिड्-पत्रेषु सम्यग्रूपेण त्रिभुजानि अङ्कयित्वा उपरि दत्ताभ्यासानां विषये स्वानुमानानां तथा भवद्भिः पर्यवेक्षितसम्बन्धानां परीक्षणं कुर्वन्तु।

❁ भवद्भिः पूर्वकक्षासु यदधीतं, तद् ज्ञानम् उपयुज्य ग्रीड्-पत्रस्य साहाय्येन कस्यापि क्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् अन्विष्यन्तु तथा -



१. **बीएडी** इति नाम्ना चिह्नितस्य नीलवर्णस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विष्यन्तु।

____

२. **एबीई** इति नाम्ना चिह्नितस्य रक्तवर्णस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विष्यन्तु।

____

एबीसीडी इति नाम्ना चिह्नितस्य आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् = ___________________

अतः बीएडी इति नाम्ना चिह्नितस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् एबीसीडी इति आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलस्य अर्धभागः अस्ति।

एबीई इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = एईएफ् त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् + बीईएफ् त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्

अत्र, एईएफ् इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = एएफ्.ईडी इति आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलस्य अर्धभागः

तथैव, बीईएफ् इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = बीएफ्.ई.सी इति आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलस्य अर्धभागः

अतः, एबीई इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = एएफ्.ईडी इति आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलस्य अर्धभागः

+ बीएफ्.ईसी इति आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलस्य अर्धभागः

© NCERT not to be republished

= एएफ्.ईडी तथा बीएफ्.ईसी इति आयतक्षेत्रयोः क्षेत्रफलस्य योगफलस्य अर्धभागः

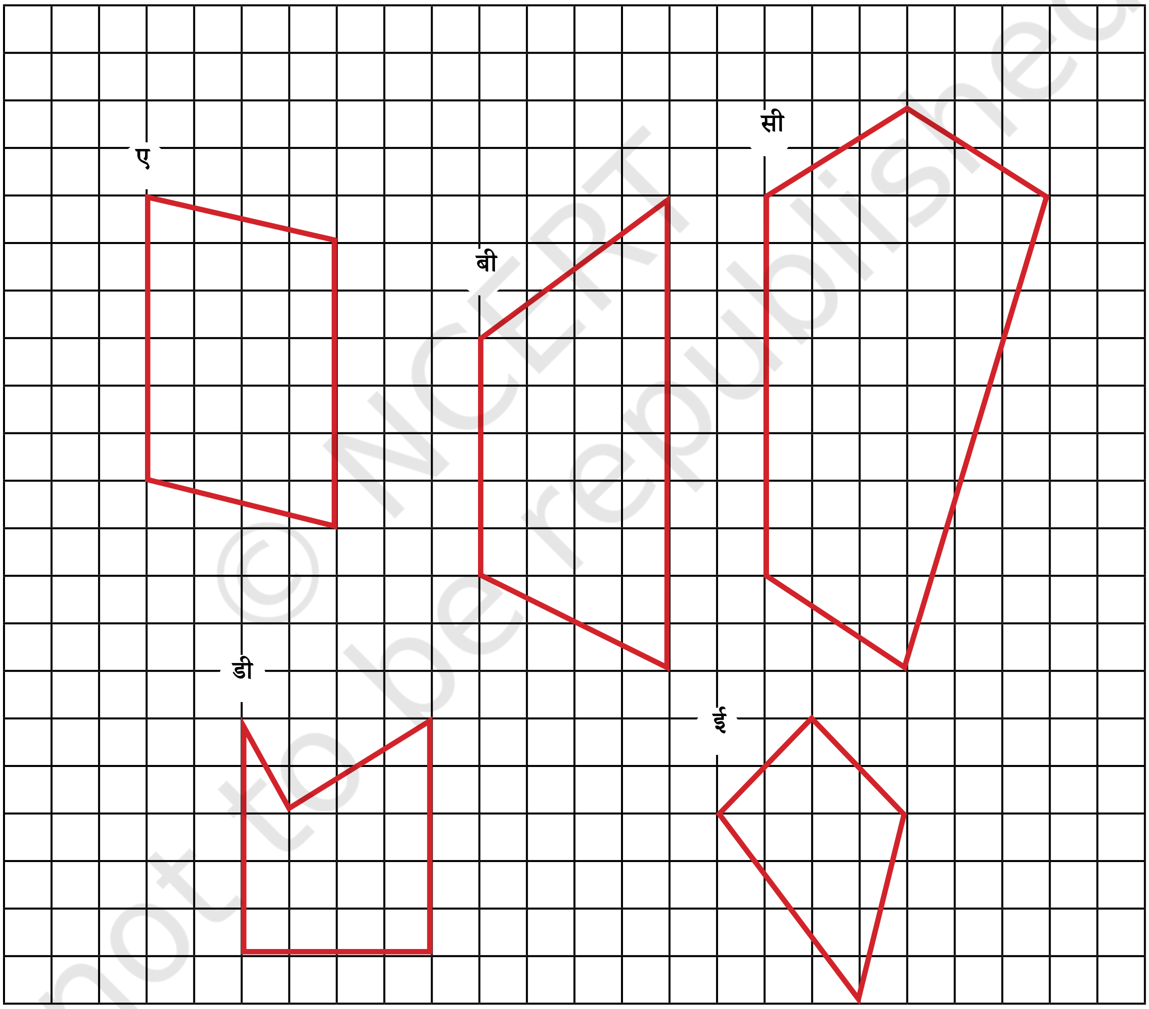
= एबीसीडी इति आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलस्य अर्धभागः

निष्कर्षः ____

____

एतत् निश्चिन्वन्तु

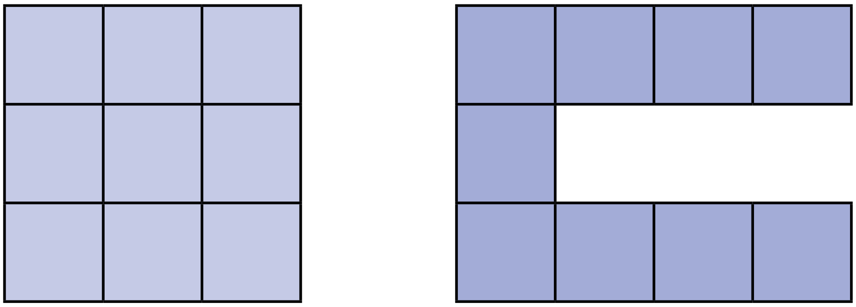
१. अधो दत्ताकाराणां क्षेत्राणि आयतक्षेत्रेषु त्रिभुजेषु च विभज्य तेषां क्षेत्रफलम् अन्विष्यन्तु।



© NCERT not to be republished

अधिकीकरणं न्यूनीकरणं च

एतयोः आकारयोः अवलोकनं कुर्वन्तु। द्वयोर्मध्ये किमपि साम्यम् अस्ति, भेदः अस्ति वा?



वयं ९ वर्ग-एकक-क्षेत्रफलविशिष्टे द्वे क्षेत्रे निर्मामः। किन्तु तयोः परिसीमाः भिन्नाः भविष्यन्ति। एतयोः प्रथमस्य परिसीमा अस्ति १२ एककम् तथा द्वितीयस्य परिसीमा अस्ति २० एककम् इति। तत्र अन्य-परिसीमाविशिष्ट-क्षेत्राणि कल्पयितुं ९ वर्ग-एकक-क्षेत्रफल-विशिष्टानि भिन्नभिन्नाकाराणि अङ्कयन्तु। तत्र प्रत्येकं वर्गक्षेत्रम् न्यूनातिन्यूनं एकस्मिन् पार्श्वे अन्येन वर्गक्षेत्रेण सह पूर्णतया संरेखितं भवेत् तथा च सर्वाणि वर्गक्षेत्राणि मिलित्वा एकस्य सम्बद्धरूपस्य निर्माणं करिष्यन्ति , यत्र किमपि रिक्तस्थानं न भवेत्।

- ९ वर्ग-एककम् उपयुज्य निम्नलिखितसमस्यानां समाधानं कुर्वन्तु।
    १. अत्र सम्भाविता लघुतमा परिसीमा का भवितुम् अर्हति?
    २. अत्र सम्भाविता बृहत्तमा परिसीमा का भवितुम् अर्हति?
    ३. तादृशम् एकम् आकारं निर्मान्तु, यस्य परिसीमा भवति १८ एककम् इति।
    ४. उपर्युक्तानां तिसृणां परिसीमानां प्रत्येकस्य कृते किं अन्यानि आकाराणि निर्मातुं शक्यते, अथवा केवलम् एकम् एव आकारम् निर्मातुं शक्यते? भवतः कः तर्कः अस्ति?
- इदानीं कथञ्चिद् जटिलतया चिन्तयामः ! अधः एकः आकारः दत्तः अस्ति, यस्य परिसीमा अस्ति २४ एककम् इति।

इदानीं पुनः गणनां विना, ध्यानेन अवलोकयन्तु, चिन्तयन्तु, तदा अन्विष्यन्तु यत् चित्रे यथा दर्शितम् अस्ति, तदनुसारं यदि एकं नूतनं वर्गक्षेत्रं योजितं भवति, तर्हि अस्य परिसीमायां किं परिवर्तनं भविष्यति।

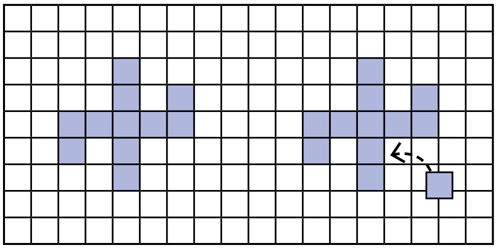
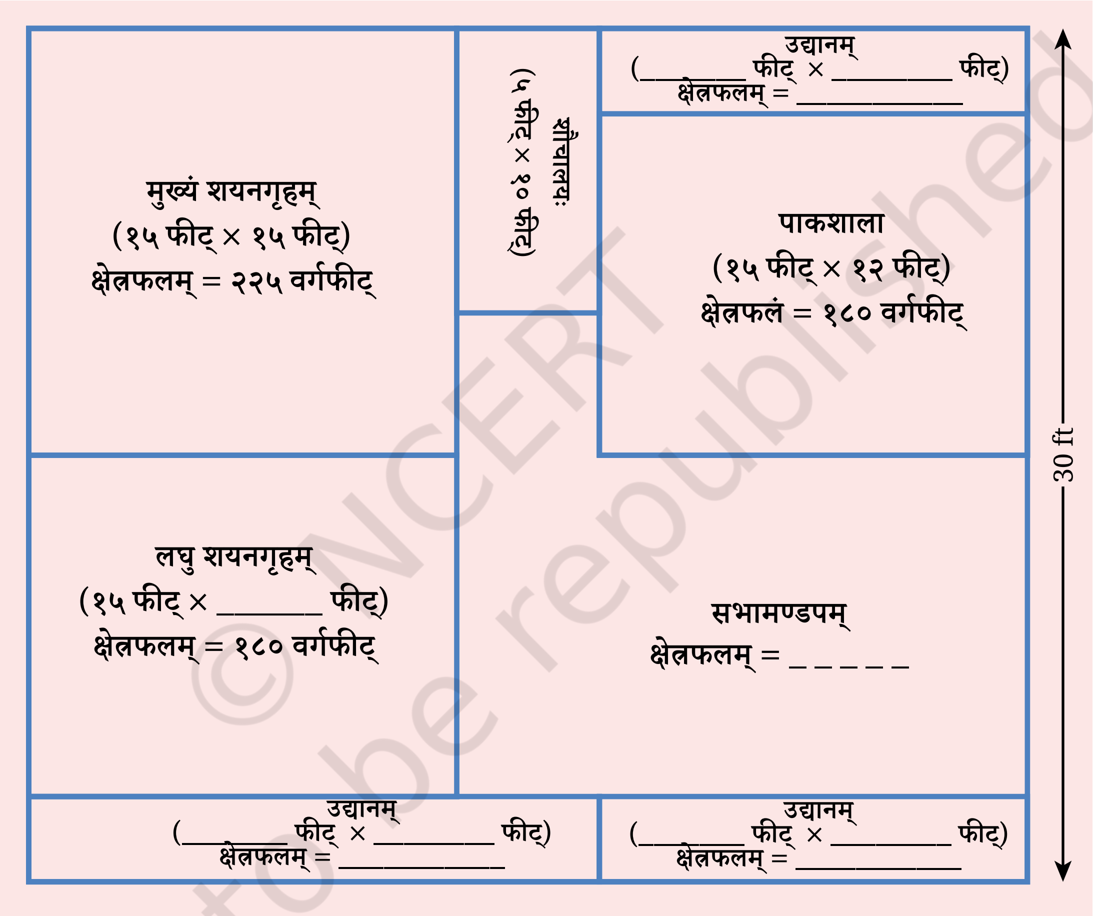


IMAGE MISSING

© NCERT not to be republished

इदानीं विभिन्नस्थानेषु एतादृशं नूतनं वर्गक्षेत्रं योजयित्वा परीक्षणं कुर्वन्तु। तदा परिसीमायां किं परिवर्तनं भवितुम् अर्हति इति चिन्तयन्तु। किं भवन्तः एतद् वर्गक्षेत्रम् एतादृशप्रकारेण स्थापयितुं शक्नुवन्ति, येन परिसीमा - (क) वर्धते, (ख) न्यूनीभवति, (ग) यथावत् तिष्ठति?

अधः चरणस्य गृहयोजना दत्ता अस्ति। एतद् आयताकारक्षेत्रम् अस्ति। एतां गृहयोजनां ध्यानेन पश्यन्तु। किम् अवलोकयन्ति?



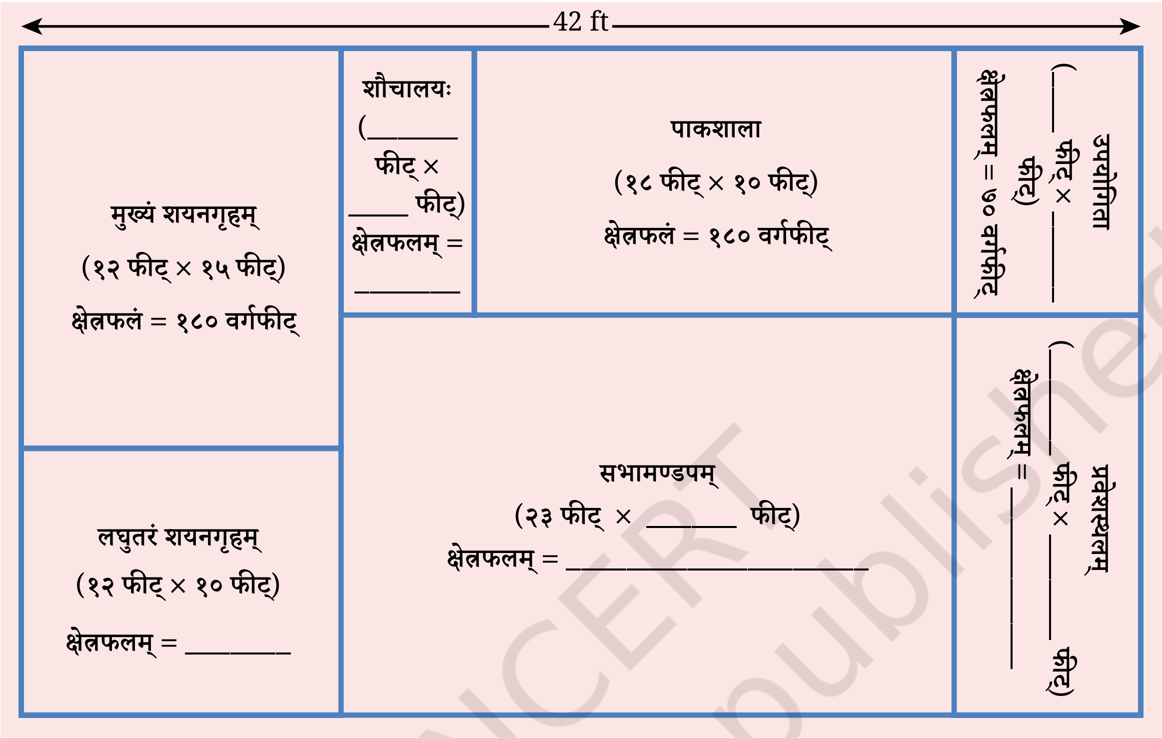
३० फीट्

अत्र केचन परिमापाः दत्ताः सन्ति।

(क) अत्र अनुपस्थितान् परिमापान् अन्विष्यन्तु।

(ख) तस्य गृहस्य क्षेत्रफलम् अन्विष्यन्तु।

इदानीं, शरणस्य गृहयोजनायाः लुप्तपरिमाणानि क्षेत्रफलानि च अन्विष्यन्तु। अधः गृहयोजना दत्ता अस्ति -



अत्र केचन परिमापाः दत्ताः सन्ति।

(क) अत्र अनुपस्थितान् परिमापान् अन्विष्यन्तु।

(ख) तस्य गृहस्य क्षेत्रफलम् अन्विष्यन्तु।

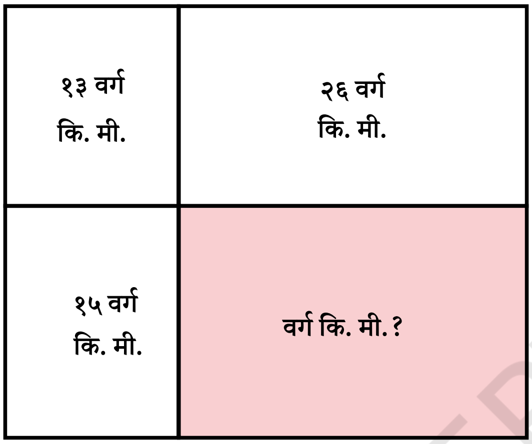
शरणस्य गृहस्य विभिन्नप्रकोष्ठानां के परिमापाः सन्ति ? शरणः चरणश्च, द्वयोर्गृहस्य क्षेत्रफलानां परिसीमानां च तुलनां कुर्वन्तु।

© NCERT not to be republished

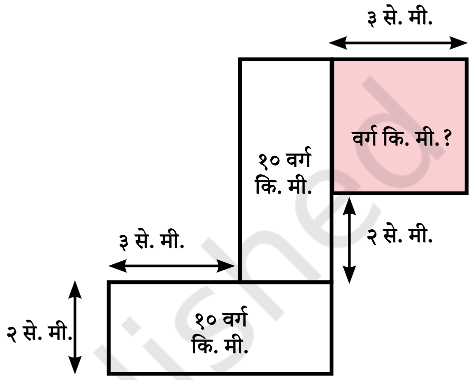
एरिया - मेज् - पाजल्

प्रत्येकस्मिन् चित्रे, केचन दैर्घ्याः क्षेत्रस्य क्षेत्रफलानि वा अनुपस्थिताः सन्ति। तेषां यथार्थपरिमापम् अन्विष्य रिक्तस्थानानि पूरयन्तु।

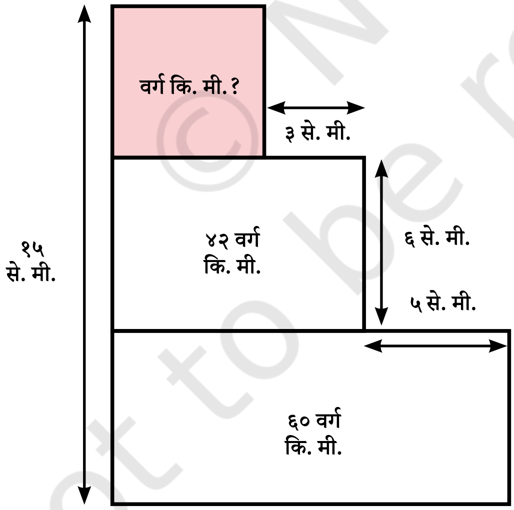
क.



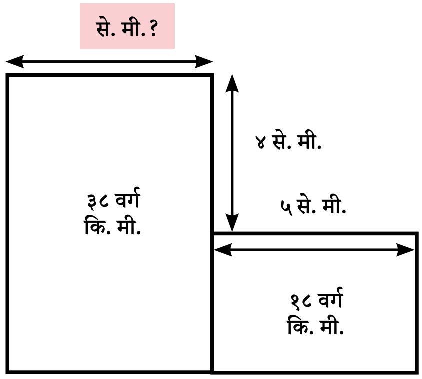
ख.



ग.



घ.



© NCERT not to be republished

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. आयतक्षेत्रद्वयमस्ति। एकस्य दैर्घ्यः अस्ति ५ मी. तथा विस्तारः अस्ति १० मी. इति। अन्यस्य दैर्घ्यः अस्ति २ मी. तथा विस्तारः अस्ति ७ मी. इति। इदानीं तृतीयमेकम् आयतक्षेत्रम् अस्ति, यस्य क्षेत्रफलं भवति अनयोः क्षेत्रफलयोः योगफलम्। अस्य तृतीयस्य आयतक्षेत्रस्य दैर्घ्यः विस्तारश्च निर्णीयेताम्।

२. आयताकार-उद्यानस्य क्षेत्रफलम् अस्ति १००० वर्ग मी. इति। अस्य दैर्घ्यः अस्ति ५० मी. इति। तर्हि अस्य विस्तारः कति भवति ?

३. एकस्य प्रकोष्ठस्य भूमितलस्य दैर्घ्यः अस्ति ५ मी. तथा विस्तारः अस्ति ४ मी. इति। तस्य उपरि ३ मी. दैर्घ्यविशिष्टः एकः वर्गाकारः कटः स्थापितः अस्ति। तलस्य तद्भागस्य क्षेत्रफलम् अन्विष्यन्तु यः भागः कटेन आवृतः नास्ति।

४. एकः भूमिखण्डः अस्ति, यस्य दैर्घ्यः अस्ति १५ मी. तथा विस्तारः अस्ति १० मी. इति। अस्य चतुर्षु कोणेषु चतस्रः पुष्प-शय्याः सन्ति, येषां दैर्घ्यः अस्ति २ मी. तथा विस्तारः अस्ति १ मी. इति। इदानीं तत्र तृणावृतस्थलनिर्माणार्थं कियत्परिमाणः भूखण्डः अवशिष्टः अस्ति ?

५. क इत्याकारस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् अस्ति १८ वर्ग-एककम् तथा ख इत्याकारस्य क्षेत्रफलम् अस्ति २० वर्ग-एककम् इति। ख इत्याकारस्य अपेक्षया क इत्याकारस्य बृहत्तर-परिसीमा अस्ति। तर्हि दत्तशर्तानुसारम् एतादृशौ द्वौ आकारौ अङ्कयन्तु।

६. स्वस्य टिप्पणीपुस्तकस्य पृष्ठे आयताकारसीमां चित्रयन्तु या उपरितः अधः पर्यन्तम् १ सेमी-विस्तारविशिष्टा भवति तथा च वामतः दक्षिणं यावत् १.५ सेमी-दैर्घ्यविशिष्टा भवति। अस्याः परिसीमा निर्णीयताम्?

७. एकम् आयतक्षेत्रम् अङ्कयन्तु, यस्य दैर्घ्यः अस्ति १२ वर्ग-एककम् तथा विस्तारः अस्ति ८ वर्ग-एककम् इति। ततः अस्य आयताकारक्षेत्रस्य अन्तः अपरम् एकम् आयतक्षेत्रम् अङ्कयन्तु, येन बाह्य-आयतक्षेत्रं न स्पृष्टम्। बाह्य-आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं सम्पूर्णक्षेत्रस्य क्षेत्रफलस्य अर्धभागः अस्ति।

८. एकः वर्गाकारः कर्गदखण्डः मध्यरेखाम् आश्रित्य पुटीक्रियते। ततः तं पुटम् आश्रित्य सः कागदखण्डः एवंरूपेण कर्तितः, येन आयतक्षेत्रद्वयं प्राप्यते। वर्गक्षेत्रस्य आकारनिर्विशेषेण निम्नलिखितवक्तव्येषु एकं सर्वदा सत्यकथनम् अस्ति। अत्र तत् सत्यकथनं किम् अस्ति?

(क) आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं सर्वदा वर्गक्षेत्रस्य क्षेत्रफलस्य अपेक्षया अधिकं भवति।

(ख) वर्गक्षेत्रस्य परिसीमा द्वयोः आयतक्षेत्रयोः सम्मिलितपरिसीमायाः अपेक्षया बृहत्तरा भवति।

(ग) द्वयोः आयतक्षेत्रयोः सम्मिलितपरिसीमा सर्वदा वर्गक्षेत्रस्य परिसीमायाः $१\frac{१}{2}$ वर्गगुणिता भवति।

(घ) वर्गक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं सर्वदा द्वयोः आयतक्षेत्रयोः सम्मिलितक्षेत्रफलस्य त्रिगुणितं भवति।

© NCERT not to be republished

सारसंक्षेपः

- बहुभुजस्य परिसीमा = तस्य सर्वेषां बाहूनां दैर्घ्यस्य योगफलम्।

  (क) आयतक्षेत्रस्य परिसीमा भवति = २ × (दैर्घ्यः + विस्तारः)

  (ख) वर्गक्षेत्रस्य परिसीमा = ४ × तस्य एकस्य भुजस्य दैर्घ्यः
- परिवेष्टित-आकृतिभिः आवृत-क्षेत्रस्य परिमाणं तस्य क्षेत्रफलम् इति उच्यते।
- सामान्यतया वर्ग-एककेन क्षेत्रफलस्य परिमापः क्रियते।
- आयतक्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् = दैर्घ्यः × विस्तारः

  वर्गक्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् = दैर्घ्यः × दैर्घ्यः
- यदा द्वयोः क्षेत्रयोः क्षेत्रफलं समानं भवति तदा तयोः परिसीमाः भिन्नाः भवितुम् अर्हन्ति। तथैव यदा द्वयोः क्षेत्रयोः परिसीमा समाना भवति, तदा तयोः क्षेत्रफलानि भिन्नानि भवितुम् अर्हन्ति।
- वर्ग-एककेषु अथवा समानाकारस्य आयतक्षेत्रेषु त्रिभुजेषु च विभज्य विभिन्नक्षेत्राणां क्षेत्रफलं निर्णेतुं शक्यते।

© NCERT not to be republished