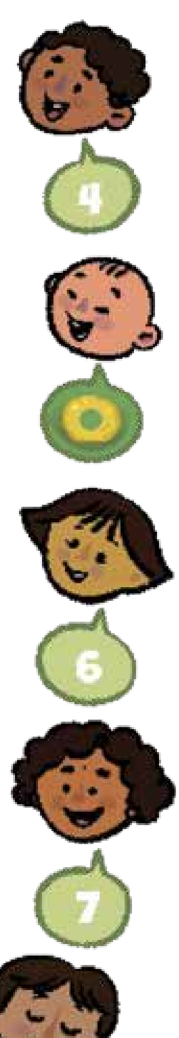
५ मौलिक - कालः

५.१ सामान्य-गुणकानि तथा सामान्य-कारकाणि

इड्ली - बडा क्रीडा



बालाः वृत्ते उपविश्य संख्यानां क्रीडां क्रीडन्ति।

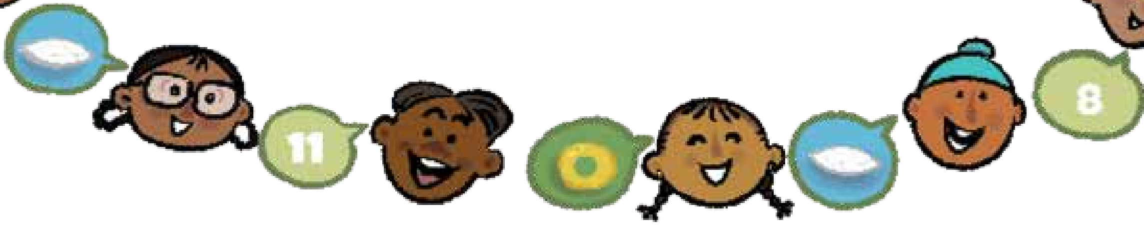
एकः बालकः '१' इति संख्याम् उक्त्वा आरभते। द्वितीयः क्रीडकः '२' इति संख्यां वदति। एवं क्रीडा चलति। परन्तु यदा ३,६,९ (३ इति संख्यायाः गुणितम्) इति संख्याः आगच्छन्ति, तदा क्रीडकः संख्यायाः स्थाने 'इड्ली' इति वदेत्। पुनः यदा ५, १० (५ इति संख्यायाः गुणितम्) इति संख्याः आगच्छन्ति, तदा क्रीडकः संख्यायाः स्थाने 'बडा' इति वदेत्। यदा काऽपि संख्या ३ तथा ५ इति उभययोः गुणिता अस्ति, तदा क्रीडकः 'इड्ली-बडा' इति वदेत्! यदि क्रीडकेषु कश्चिद् दोषं करोति , तर्हि सः क्रीडातः बहिः भविष्यति।

यावद् एकस्य अधिकाः बालकाः/बालिकाः सन्ति तावत् क्रीडा क्रमेण अनुवर्तिष्यते।

कासां संख्यानां कृते क्रीडकाः संख्यायाः स्थाने 'इड्लि' इति वक्तुं शक्नुवन्ति? एताः संख्याः ३,६,९,१२,१८ इत्यादयः भवितुम् अर्हन्ति।

कासां संख्यानां कृते क्रीडकाः संख्यायाः स्थाने 'बडा' इति वक्तुं शक्नुवन्ति? एताः संख्याः ५,१०,२० इत्यादयः भवितुम् अर्हन्ति।

तत्र आद्यसंख्या का अस्ति, यस्य कृते क्रीडकाः संख्यायाः स्थाने 'इड्ली-वडा' इति वक्तुं शक्नुवन्ति? एषा संख्या १५ इति भवितुं शक्नोति यतः १५ इति संख्या ३ तथा ५ इत्युभययोः गुणितम् अस्ति। एतादृश्यः अन्याः संख्याः अन्विष्यन्तु याः ३ तथा ५ इत्युभयोः गुणिताः सन्ति। एताः संख्याः__________ इति उच्यन्ते।



एतत् निश्चिन्वन्तु

१. दशमे वारे कस्याः संख्यायाः कृते 'इड्ली-बडा' इति शब्दाः उपयुज्यन्ते?

२. यदि क्रीडा १ संख्यातः ९० संख्यापर्यन्तम् अङ्कैः क्रीड्यते, तर्हि चिन्तयित्वा वदन्तु -

   क. बालकाः कतिवारं 'इड्ली' इति वदन्ति (यदा ते 'इड्ली-बडा' इति वदन्ति, तदपि अन्तर्भवति)?

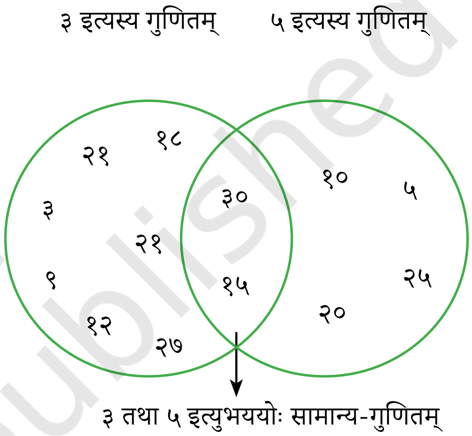
   ख. बालकाः कतिवारं 'बडा' इति वदन्ति (यदा ते 'इड्ली-बडा' इति वदन्ति, तदपि अन्तर्भवति)?

   ग. बालकाः कतिवारम् 'इड्ली-बडा' इति वदन्ति?

३. यदि क्रीडा ९०० इति संख्यापर्यन्तम् अङ्कैः क्रीड्यते, तर्हि किं भविष्यति? तदा भवताम् उत्तराणि कानि भविष्यन्ति?

४. किमेतत् चित्रम् 'इड्ली-बडा'-क्रीडया सह सम्बद्धम् अस्ति?

संकेतः - कल्पयन्तु यद् एषा क्रीडा ३० इति संख्यापर्यन्तं क्रीडिता भवति। इदानीं यदि ६० इति संख्यापर्यन्तं क्रीड्यते, तर्हि एतत् चित्रं किदृशं भविष्यति, तद् अङ्कयन्तु।



चित्रम् ५.१

इदानीं वयं भिन्नसंख्याकैः 'इड्ली-बडा' इति क्रीडां क्रीडामः।

क. २ तथा ५

ख. ३ तथा ७

ग. ४ तथा ६

वयं लघुतमगुणकस्य कृते 'इड्ली' इति शब्दं वदामः। पुनः बृहत्तमगुणकस्य कृते 'बडा' इति शब्दं वदामः। अपि च इति द्वयोः संख्ययोः सामान्य-गुणकस्य कृते 'इड्ली-बडा' इति शब्दान् वदामः। चित्रस्य सदृशं चित्रं चित्रयतु। ५.१ यदि क्रीडा ६० पर्यन्तं क्रीड्यते।

ततः अन्या संख्या निम्नलिखितेषु का भवितुम् अर्हति -

२, ३, ५, ८, १० ?

जम्प् ज्याक्-पट्

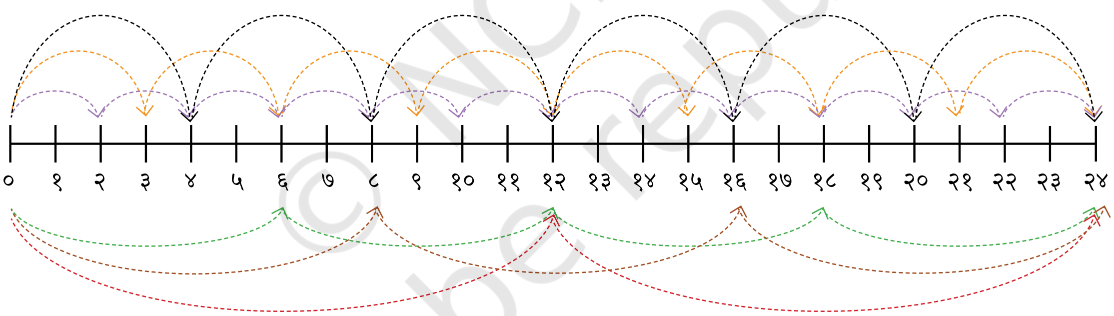
जम्पी, ग्रम्पी इत्येतौ एकां क्रीडां क्रीडतः।

- ग्रम्पी एकस्याः संख्याः उपरि एकं निधिः स्थापयति। उदाहरणार्थं, सः २४ इति अङ्कस्य उपरि तत् स्थापयितुं शक्नोति।
- जम्पी लम्फनस्य कृते एकां संख्यां चिनोति। यदि सः ४ इति अङ्कं चिनोति, तर्हि सः ०तः आरभ्य केवलं ४ इत्यस्य गुणितेषु एव कूर्दनम् करिष्यति।
- यदि जम्पी तत् संख्यास्थानं प्राप्स्यति, यत्र ग्रम्पी पूर्वं निधिं स्थापितवान्, तर्हि सः तद्धनराशिं लप्स्यते।

२४ इति संख्यास्थानं प्राप्तुं कूर्दनस्य आकारः किदृशं भवति ?

यदि सः ४ इति अङ्कम् इच्छति - तर्हि तस्य कूर्दनस्य आकारः भविष्यति - ४ → ८ → १२ → १६ → २० → २४ → २८ → ...

तत्र अन्यानि अपि कूर्दनानि भवितुम् अर्हन्ति। यथा, २, ३, ६, ८, १२ इत्यादि।



१ तथा २४ इत्येतयोः कृते कूर्दनस्य आकारः किदृशं भविष्यति ? आम्। ते २४ इति संख्यास्थानमपि प्राप्स्यन्ति।

अत्र २४ इति संख्या १, २, ३, ४, ६, ८, १२, २४ इति सर्वैः अङ्कैः विभाज्यम् अस्ति। एते सर्वे अङ्काः २४ इत्यस्य भाजकाः सन्ति।

इदानीं ग्रम्पी इत्येषः क्रीडायाः स्तरं वर्धयति। सः द्वौ निधी भिन्नभिन्नसंख्यायाः उपरि स्थापितवान्। जम्पी इत्यनेन कूर्दनस्य कृते एकं संख्यास्थानं चेतव्यम् अस्ति। यदि सः चितेन संख्यास्थानेन तत् संख्याद्वयं प्राप्तुं शक्नोति, तर्हि एव सः ग्रम्पी इत्यनेन स्थापितं धनसञ्चयं प्राप्स्यति। जम्पी ० तः आरभते।

ग्रम्पी इत्येषः १४ तथा ३६ इति संख्ययोः मध्ये तस्य निधिं रक्षितवान् अस्ति। जम्पी इत्येषः कूर्दनस्य कृते ७ इति संख्यां चीतवान्।

किं जम्पी द्वौ अपि निधी प्राप्तुं शक्नोति ? सः ० तः आरभ्य ७ पर्यन्तं कूर्दति- ७ → १४ → २१ → २८ → ३५ → ४२.... पश्यन्तु यत् सः १४ इति संख्यास्थानं प्राप्तवान् परन्तु ३६ इति संख्यास्थानं प्राप्तुं न शक्नोति। अतः सः निधिं न प्राप्तवान्। तेन कूर्दनस्य कृते का संख्या चेतव्या आसीत्?

१४ इत्यस्य भाजकानि सन्ति - १, २, ७, तथा १४ । अतः एताः संख्याः प्रविश्य १४ इति संख्यास्थानं प्राप्तुं शक्नुमः।

३६ इत्यस्य भाजकानि सन्ति - १, २, ३, ४, ६, ९, १२, १८ तथा ३६ । अतः एताः संख्याः प्रविश्य ३६ इति संख्यास्थानं प्राप्तुं शक्नुमः।

पश्यन्तु, कूर्दनस्य कृते एतेषु १ अथवा २ इति संख्यास्थानं यदि चीयते, तर्हि एव १४ तथा ३६ इति संख्याद्वयमेव प्राप्स्यामः। लक्षयन्तु यदत्र १, २ इति संख्याद्वयं १४ तथा ३६ इत्युभययोः सामान्यभाजकम् अस्ति।

कूर्दनस्य कृते याः संख्याः उपयुज्य उभयं निधिं प्राप्तुं शक्यते, ताः संख्याः तयोः द्वयोः अङ्कयोः सामान्य-भाजकानि भवन्ति, यत्र निधयः स्थापिताः सन्ति।

- कूर्दनस्य कृते कां संख्याम् उपयुज्य १५ तथा ३० इति द्वे संख्यास्थाने प्राप्तुं शक्यते ? अस्य कृते विविधाः संख्याः भवितुम् अर्हन्ति। ताः सर्वाः अन्वेष्टुं प्रयतताम्।

- अधः दर्शितां पट्टिकां पश्यन्तु। भवन्तः किं पश्यन्ति?

३१	३२	३३	३४	३५	३६	३७	३८	३९	४०
४१	४२	४३	४४	४५	४६	४७	४८	४९	५०
५१	५२	५३	५४	५५	५६	५७	५८	५९	६०
६१	६२	६३	६४	६५	६६	६७	६८	६९	७०

अस्यां पट्टिकायाम् -

१. किं छायाङ्कितानां संख्यानां मध्ये काऽपि समानता दृश्यते?

२. किं वृत्तचिह्नितसंख्यानां मध्ये काऽपि समानता दृश्यते?

३. तत्र काः संख्याः छायाङ्किताः तथा वृत्तचिह्निताश्च सन्ति ? एताः संख्याः केन नाम्ना उच्यन्ते?

गणित कथा

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. ३१० इत्यतः ४१० इति संख्यापर्यन्तं ४० इत्यस्य यानि गुणितानि सन्ति, तेषां सर्वेषां नामानि लिखन्तु।

२. अहं कः अस्मि?
   क. अहं ४० इत्यतः न्यूनसंख्या अस्मि। मम भाजकेषु एकः अस्ति ७ इति। मम अङ्कानां योगफलमस्ति ८ इति।
   ख. अहं १०० इत्यतः न्यूनसंख्या अस्मि। ३ तथा ५ इति मम द्वौ भाजकौ स्तः। मम अङ्केषु एकः अन्यस्य अपेक्षया एकम् अधिकम् अस्ति।

३. यस्याः संख्यायाः सर्वेषाम् अङ्कानां योगफलं तस्याः द्विगुणस्य समानं भवति, सा संख्या पूर्णसंख्या इति उच्यते। २८ इति एका पूर्णसंख्या अस्ति। १, २, ४, ७, १४, २८ इति संख्याः अस्याः भाजकाः सन्ति। तेषां योगफलमस्ति ५६ इति। अपि च २८ इत्यस्य द्विगुणमस्ति ५६ इति। अधुना १ तः १० पर्यन्तं पूर्णसंख्याः अन्विष्यन्तु।

४. एतेषां संख्यायुग्मानां कृते सामान्य-भाजकानि अन्विष्य लिखन्तु।
   क. २० तथा २८   ख. ३५ तथा ५०
   ग. ४, ८ तथा १२   घ. ५, १५, तथा २५

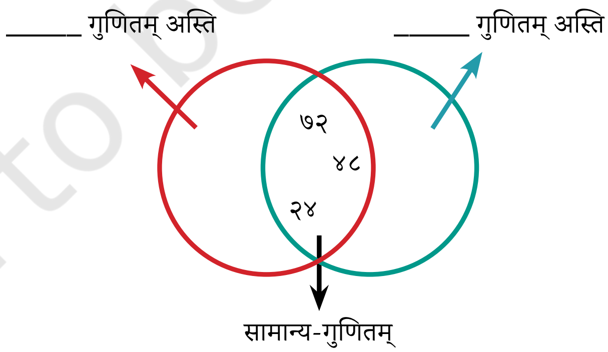
५. तादृश्यः तिस्रः संख्याः अन्विष्य लिखन्तु, याः २५ इत्यस्य गुणिताः सन्ति परन्तु ५० इत्यस्य गुणिताः न सन्ति।

६. अंशुः तस्य मित्रैः सह द्वे संख्ये स्वीकृत्य 'इड्ली-बडा' इति क्रीडाम् क्रीडति। यत् संख्याद्वयं ते चिन्वन्ति तद् उभयं १० इत्यतः लघु अस्ति। तत्र यदा प्रथमवारं कश्चित् 'इड्ली-बडा' इति वदति, तत् ५० इति संख्यायाः अनन्तरम् आगच्छति। तर्हि 'इड्ली' तथा 'वडा' इत्येतयोः कृते चिते संख्ये के भवितुम् अर्हतः?

७. निध्यन्वेषणक्रीडायां ग्रम्पी इत्येषः २८ तथा ७० इति संख्ययोः मध्ये स्वस्य धनं स्थावितवान्। तर्हि तद् उभयम् अङ्कं प्राप्तुं कूर्दनस्य कृते का संख्या चेतव्या भवति ?

८. अधः, रेखाचित्रे गुनः इत्यनेन सामान्य-गुणकान् विहाय अन्याः सर्वाः संख्याः निष्कासिताः सन्ति। ताः संख्याः काः भवितुम् अर्हन्ति इति ज्ञातव्यम्। तदा ताभिः संख्याभिः रिक्तस्थानानि पूरयन्तु।

गणित कथा



९. ७ इति संख्यां विहाय १ तः १० पर्यन्तं सर्वेषाम् अङ्कानां सामान्य-गुणितेषु लघुतमा संख्या का अस्ति इति ज्ञातव्यम्।

प्रयतताम् इदम्

१०. १ तः १० पर्यन्तं सर्वेषाम् अङ्कानां सामान्य-गुणितेषु लघुतमा संख्या का अस्ति इति ज्ञातव्यम्।

५.२ मौलिक - संख्याः

गुनः अंशुश्च इत्येतौ स्वक्षेत्रे वर्धमानानि उदुम्बराणि (अंजीरः) सज्जीकर्तुम् इच्छन्ति। गुणः इत्येषः प्रत्येककोष्टके १२ उदुम्बराणि स्थापयितुम् इच्छति, अंशुश्च प्रत्येककोष्टके ७ उदुम्बराणि स्थापयितुम् इच्छति।

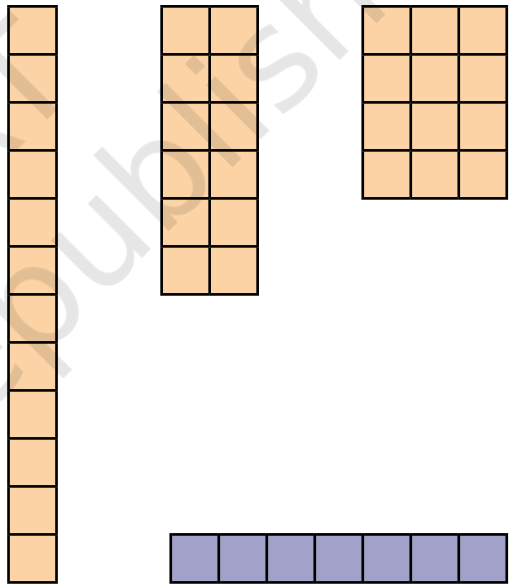
तर्हि कति प्रकारेण उदुम्बराणि सज्जीकर्तुं शक्यते?

अस्य कृते भिन्नभिन्नोपायान् चिन्तयन्तु अन्विष्यन्तु च -

१. गुनः इत्येषः आयताकाररूपेण १२ उदुम्बराणि सज्जीकर्तुं शक्नोति।

२. अंशुः इत्येषः आयताकाररूपेण ७ उदुम्बराणि सज्जीकर्तुं शक्नोति।

गुनः इत्येषः एतासां सम्भावितव्यवस्थानां सूचीं कृतवानस्ति।



प्रत्येकस्यां व्यवस्थायां पङ्क्तीनां स्तम्भानां च संख्यां पश्यन्तु। ते १२ इति संख्यया सह कथं सम्बद्धाः सन्ति?

द्वितीयव्यवस्थायां, उदाहरणार्थं, १२ उदुम्बराणि ६-६ अथवा १२ = २×६ इति स्तम्भद्वये व्यवस्थितानि सन्ति।

अंशुः केवलम् एकेन प्रकारेण उदुम्बराणि सज्जीकर्तुं शक्नोति - ७×१ अथवा १×७ । अत्र अन्या काऽपि आयताकार-व्यवस्था न सम्भवति।

गुणस्य प्रत्येकस्यां व्यवस्थायां पङ्क्तिसंख्यायाः स्तम्भसंख्यया सह गुणनं कृत्वा १२ इति संख्या लभ्यते। अतः, अत्र पङ्क्तीसंख्या स्तम्भसंख्या वा १२ इति अंकस्य भाजकं भवति।

वयं दृष्टवन्तः यत् १२ इति संख्याम् अनेकप्रकारस्य आयताकारव्यवस्थाद्वारा सज्जीकर्तुं शक्यते यतः १२ इत्यस्य अनेकानि भाजकानि सन्ति। तद्विपरीते तु, ७ इति संख्यां केवलम् एकेनैव आयताकारव्यवस्थाद्वारा सज्जीकर्तुं शक्यते यतः ७ इत्यस्य केवलं द्वे भाजके स्तः॥

संख्यासु यासां केवलं द्वे एव भाजके स्तः, ताः **मौलिक-संख्याः** इति कथ्यन्ते। ताः क्रमशः एवं सन्ति - २, ३, ५, ७, ११, १३, १७, १९ इत्यादि। लक्षयन्तु यत् अभाज्यसंख्यानां विषये केवलं द्वे भाजके स्तः। एकं भवति १, अन्यं चास्ति सा संख्या स्वयमेव।

पुनः संख्यासु यासां अनेकानि भाजकानि सन्ति, ताः केन नाम्ना आख्यायन्ते? ताः **यौगिक-संख्याः** इति उच्यन्ते। ताः क्रमशः एवं सन्ति - ४, ६, ८, ९, १०, १२, १४, १५, १६, १८, २० इत्यादि।

परन्तु पश्यन्तु यत् १ इति संख्यायाः केवलम् एकम् एव भाजकम् अस्ति। तर्हि १ इति संख्या केन नाम्ना अभिधीयते? वस्तुतः १ इति संख्या अभाज्य-संख्या नास्ति, भाज्य-संख्या अपि नास्ति।

२० तः ३० पर्यन्तं संख्यासु कति मौलिक-संख्याः सन्ति? अपि च २१ तः ३० पर्यन्तं संख्यासु कति भाज्य-संख्याः सन्ति?

किं वयम् १ तः १०० पर्यन्तं सर्वासां मौलिक-संख्यानां सूचीं निर्मातुं शक्नुमः?

भाज्य-संख्याः अन्वेष्टुम् एकः रोचकः उपायः अस्ति। अधो दत्तानि चरणानि अनुसृत्य किं भवति पश्यन्तु।

पर्यायः १ : १ इति संख्यां कर्तयन्तु यतो ह्येषा मौलिक-संख्या नास्ति, विभाज्य-संख्याऽपि नास्ति।

पर्यायः २ : २ इति संख्यायाः उपरि वृत्ताकारं चिह्नं स्थापयन्तु। अपि च २ इति संख्यायाः सर्वेषां गुणितानां यथा, ४, ६, ८ इत्यादीः संख्याः कर्तयन्तु।

पर्यायः ३ : भवन्तः पश्यन्ति यत् अग्रिमा रिक्तसंख्या ३ इति अस्ति। तस्याः उपरि वृत्तचिह्नं स्थापयन्तु। अपि च ३ इति संख्यायाः सर्वेषां गुणितान् कर्तयन्तु।

पर्यायः ४ : अग्रिमा रिक्तसंख्या ५ इति अस्ति। तस्याः उपरि वृत्तचिह्नं स्थापयन्तु। अपि च ५ इति संख्यायाः सर्वेषां गुणितानां यथा, १०, १५, २० इत्यादीः संख्याः कर्तयन्तु।

पर्यायः ५ : इमां प्रक्रियाम् अग्रे अनुवर्तयन्तु।

~~१~~	२	३	~~४~~	५	~~६~~	७	~~८~~	~~९~~	~~१०~~
११	~~१२~~	१३	~~१४~~	~~१५~~	~~१६~~	१७	~~१८~~	१९	~~२०~~
~~२१~~	~~२२~~	२३	~~२४~~	~~२५~~	~~२६~~	~~२७~~	~~२८~~	२९	३०
३१	~~३२~~	~~३३~~	~~३४~~	~~३५~~	~~३६~~	३७	~~३८~~	~~३९~~	~~४०~~
४१	~~४२~~	४३	~~४४~~	~~४५~~	~~४६~~	४७	~~४८~~	~~४९~~	~~५०~~
~~५१~~	~~५२~~	५३	~~५४~~	~~५५~~	~~५६~~	~~५७~~	~~५८~~	५९	~~६०~~
६१	~~६२~~	~~६३~~	~~६४~~	~~६५~~	~~६६~~	६७	~~६८~~	~~६९~~	~~७०~~
७१	~~७२~~	७३	~~७४~~	~~७५~~	~~७६~~	~~७७~~	~~७८~~	७९	~~८०~~
~~८१~~	~~८२~~	८३	~~८४~~	~~८५~~	~~८६~~	~~८७~~	~~८८~~	८९	~~९०~~
~~९१~~	~~९२~~	~~९३~~	~~९४~~	~~९५~~	~~९६~~	९७	~~९८~~	~~९९~~	~~१००~~

अत्र सर्वाः वृत्ताकारसंख्याः मौलिक-संख्याः सन्ति। १ इति संख्यां परित्यज्य अन्याः सर्वाः एक्स-चिह्नयुक्ताः संख्याः भाज्य-संख्याः सन्ति। अयं विधिः एरेटोस्टनीस्-महोदयस्य चालुनी-विधिः (सिभ अफ एरटोस्टनीस) इति कथ्यते।

शतात् परम् अन्यासां संख्यानां विषये अपि इमं विधिम् अनुसर्तुं शक्नुमः। एरेटोस्टनीस्-महोदयः ग्रीस्-देशीयः गणितशास्त्रज्ञः आसीत्, यः प्रायः २२०० वर्षेभ्यः पूर्वम् आसीत्। अभाज्यसंख्यानां निर्णयार्थं तेन महाभागेन इयं पद्धतिः विकसिता आसीत्।

गुणः अंशुश्च इत्येतौ चिन्तयतः यद् एषा सरल-पद्धतिः कथम् मौलिकसंख्याम् अन्वेष्टुं शक्नोति इति! इयं पद्धतिः कथं कार्यं करोति इति चिन्तयन्तु। उपरि दत्तानि चरणानि एकवारं पुनः पठित्वा प्रत्येकस्य चरणस्य निष्पादनानन्तरं किं भवति इति पश्यन्तु।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. वयं पश्यामः यद् २ इति संख्या मौलिकी अपि च समसंख्या अस्ति इति। अत्र अन्या तादृशसंख्या अस्ति वा, या अभाज्यम् अपि च समसंख्या अस्ति?

२. १०० पर्यन्तं मौलिक-संख्यानां सूचीं पश्यन्तु। द्वयोः क्रमिक-मौलिक-संख्ययोर्मध्ये लघुतमः भेदः कः? बृहत्तमः भेदश्च कः?

३. पूर्वपृष्ठे पट्टिकायाः प्रत्येकस्यां पङ्क्तौ समसंख्याकाः मौलिकसंख्याः सन्ति वा? तेषु केषु दशकेषु मौलिकसंख्याः न्यूनतमाः सन्ति? कस्मिन् च मौलिकसंख्याः सर्वाधिकाः सन्ति?

बहुयुगानि व्याप्य मौलिक-संख्यानां व्यवहारः

मौलिकसंख्याः वस्तुतः सर्वासां पूर्णसंख्यानां निर्माणखण्डाः सन्ति। ग्रीक-सभ्यतायाः युगाद् आरभ्य (२००० वर्षेभ्यः पूर्वम्) अद्यपर्यन्तं, गणितशास्त्रज्ञाः अद्यापि तेषां रहस्यानि सम्पूर्णतया उद्घाटयितुं न शक्नुवन्ति!

चिन्तनीयः विषयः - किं तत्र काऽपि बृहत्तमा मौलिकसंख्या अस्ति ? अथवा मौलिकसंख्यानां सूची निरन्तरं प्रचलति? यूक्लिड् इत्याख्यः गणितशास्त्रज्ञः अस्य उत्तरम् अन्विष्टवान्। भवन्तः तद् अग्रिमवर्गेषु पठिष्यन्ति!

रोचकतथ्यम् - चिन्तयन्तु, तत्र काऽपि एतादृशी बृहत्तमा मौलिक-संख्या सम्भवति, या एतावती विशाला अस्ति यद् लिखितुं प्रायः ६५०० पृष्ठानि आवश्यकानि भवन्ति! यदि भवति, तर्हि तादृशीम् मौलिक-संख्यां केवलं सङ्गणके एव सेखितुं शक्यते!

४. २३, ५१, ३७, २६ इत्येतासु संख्यासु कानि अभाज्यानि सन्ति?

५. तादृश्यः तिस्रः मौलिक-संख्याः लिखन्तु, याः २० इत्यतः न्यूनाः भवन्ति तथा तेषां योगफलं ५ इत्यस्य गुणितं भवति ।

६. १३ तथा ३१ इति द्वयम् मौलिक-संख्या अस्ति। द्वयोः एव संख्ययोः १ तथा ३ इति अङ्कद्वयं समानम् अस्ति। १०० पर्यन्तम् एतादृश-अभाज्य-संख्यानां युग्मानि अन्विष्यन्तु।

७. १ तः १०० पर्यन्तं सप्त क्रमिक-सम-संख्याः अन्विष्यन्तु।

८. **यमज-मौलिक-संख्याः** मौलिक-संख्यानां तादृशं युग्मम् अस्ति, ययोर्मध्ये सर्वदा २ इति संख्यायाः भेदः वर्तते। यथा, ३ तथा ५ इति तादृशं युग्मम् अस्ति। एवं १७ तथा १९। १ तः १०० पर्यन्तम् एतादृशानि अन्यानि युग्मानि अन्विष्यन्तु।

९. अधो दत्तं प्रत्येकं वक्तव्यं सत्यं वा असत्यम् वा इति अभिजानन्ति। व्याख्यान्तु च।
   क. तत्र काऽपि एतादृशी अभाज्यसंख्या नास्ति यत्र ४ इति अङ्कः अस्ति।
   ख. मौलिकसंख्यानां गुणनफलमपि सर्वदा अभाज्यं भवति।
   ग. मौलिक-संख्यानां भाजकानि न भवन्ति।
   घ. सर्वाः युग्मसंख्याः समसंख्याः भवन्ति।
   ङ. २ इति मौलिक-संख्या अस्ति। तः अग्रिमसंख्या ३ इति अस्ति। एवं प्रत्येकस्याः मौलिकसंख्यायाः अग्रिमसंख्या समसंख्या भवति।

१०. निम्नलिखितेषु का संख्या तिसृणां विशिष्टानाम् मौलिक-संख्यानां गुणनफलम् अस्ति - ४५, ६०, ९१, १०५, ३३०?

११. २, ४ तथा ५ इति संख्यानां प्रत्येकं सकृद् उपयुज्य कति त्रि-अङ्कीय-मौलिक-संख्याः निर्मातुं शक्यते?

१२. लक्षयन्तु यत् ३ इति मौलिक-संख्या अस्ति। $२ \times ३ + १ = ७$ इत्यपि मौलिक-संख्या अस्ति। किम् अन्याः अपि अभाज्य-संख्याः सन्ति, येषां द्विगुणं कृत्वा तेन सह १ इति योजयित्वा च अपराम् एकाम् मौलिक-संख्यां प्राप्तुं शक्यते? न्यूनातिन्यूनं पञ्च एतादृशानि उदाहरणानि अन्विष्यन्तु।

५.३ कोषानां निधीनां वा सुरक्षार्थं सह-अभाज्यसंख्यानां व्यवहारः

कानि युग्मानि सुरक्षितानि सन्ति?

धनान्वेषणस्य क्रीडां प्रति पुनः गच्छामः। अधुना निधयः द्वयोः अङ्कयोः उपरि स्थापिताः भवन्ति। यदि जम्पी इत्येषः उभययोः संख्ययोः कृते कूर्दनस्य समानसंख्यां चिनोति, तर्हि सः निश्चयेन धनं प्राप्स्यति। अत्र नियमः अस्ति - १ इति संख्यां स्वीकर्तुं न शक्यते।

ग्रम्पी इत्यनेन कुत्र धनं स्थाप्येत, येन जम्पी इत्येषः तत् प्राप्तुं न शक्नोति?

किं १२ तथा २६ इति संख्ययोः उपरि धनं स्थापयितुं शक्यते? न! यदि कूर्दनस्य कृते २ इति संख्या चिता, तर्हि जम्पी १२ एवञ्च २६ इति उभयसंख्यां प्राप्स्यति।

किं ४ तथा ९ इति संख्ययोः उपरि धनं स्थापयितुं शक्यते? आम्! तदा जम्पी केनापि प्रकारेण उभयसंख्यां प्राप्तुं न शक्नोति।

एतानि युग्मानि सुरक्षितानि, न वा इति पश्यन्तु।

क. १५ तथा ३९   ख. ४ तथा १५

ग. १८ तथा २९   घ. २० तथा ५५

सुरक्षित-युग्मानां विषये किः विशेषः अस्ति? तेषां १ इति संख्यां विहाय अन्यत् किमपि सामान्य-भाजकं नास्ति। एतादृशं युग्मं परस्परं **सह-मौलिक-संख्या** इति उच्यते।

उदाहरणम् -: यथा १५ तथा ३९ इत्येतयोः ३ इति सामान्य-भाजकम् अस्ति। अतः एते परस्परं सह-अभाज्य-संख्ये न। परन्तु ४ एवञ्च ९ इति द्वे सह-अभाज्य-संख्ये स्तः।

संख्यानां निम्नलिखित-युग्मेषु काः सह-अभाज्यसंख्याः सन्ति?

क) १८ तथा ३५ ख) १५ तथा ३७ ग) ३० तथा ४१५

घ) १७ तथा ६९ ङ) ८१ तथा १८

संख्यानां भिन्नभिन्नयुग्मैः सह '*इदली-वडा*' *इति क्रीडाकाले* अंशुः किमपि रोचकं प्राप्तवान्!

१. कदाचित् द्वयोः प्रथमं सामान्यगुणितं, द्वयोः संख्ययोः गुणनफलं भवति स्म।
२. अन्यसमयेषु तत् प्रथमं सामान्यगुणितं द्वयोः संख्ययोः गुणनफलात् न्यूनम् आसीत्।

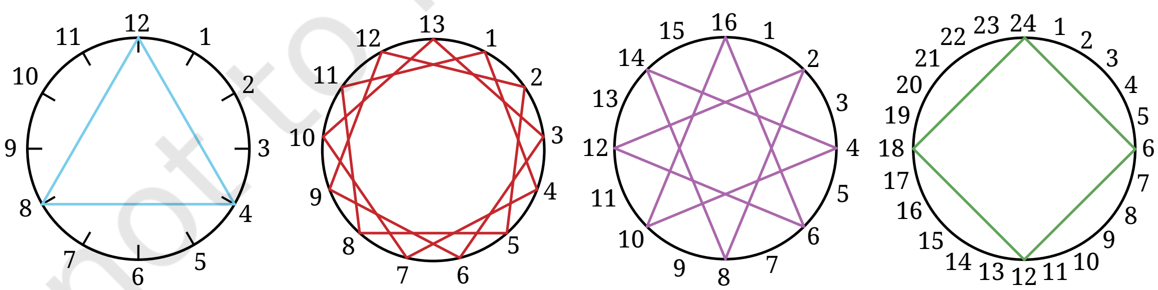
उपरि उक्तस्य प्रत्येकस्य कृते उदाहरणानि अन्विष्यन्तु। सह-अभाज्यसंख्यात्वेन एतत् कथं युग्मसंख्यया सह सम्बद्धम् अस्ति?

गणित कथा

सह-मौलिक-संख्या

अधोवर्तिनीं कलाकृतिं वयम् अधुना पश्यामः। प्रथमायां कलायां १२ चिह्नानि सन्ति, यत्र तानि चतूर्णां व्यवधानेन प्रदत्तानि सन्ति। द्वितीयायां कलायां १३ चिह्नानि सन्ति, यत्र च त्रयाणां व्यवधानेन चिह्नानि प्रदत्तानि। अन्यासु कलासु किम् अस्ति ? एताः कलाकृतीः अवलोकयन्ति, सहभागयन्तु, भवतां मित्रैः सह वर्गे च परिशीलयन्तु।

गणित कथा



केषुचित् रेखाचित्रेषु सूत्रं प्रत्येकं पेग् प्रति बद्धम् अस्ति। केषुचित् विषयेषु, तत् न। किं एतत् द्वाभ्यां संख्याभ्यां सह सम्बद्धम् अस्ति (पेग्-संख्या, थ्रेड्-ग्याप् च) सह-प्रधानम् अस्ति?

अधः दत्तानां चित्राणां कृते एतादृशानि चित्राणि निर्मातुः

क. १५ पेग्स्, १० इत्यस्य थ्रेड्-ग्याप्
ख. १० पेग्स्, थ्रेड्-ग्याप् आफ् ७
ग. १४ पेग्स्, थ्रेड्-ग्याप् आफ् ६
घ. ८ पेग्स्, ३ इत्यस्य थ्रेड्-ग्याप्

५.४ मौलिक-संख्यानां गुणकीकरणम्

यदि द्वौ सङ्ख्याः सह-प्रधानौ स्तः तर्हि परीक्षणम्।

शिक्षकः	५६ तथा ६३ इति द्वे सह-अभाज्यसंख्ये वा?
अंशुः गुणश्च	यदि तयोः १ इति संख्यां परित्यज्य अन्यानि सामान्यभाजकानि भवन्ति, तर्हि ते सह-अभाज्य-संख्ये न भवितुं शक्नुतः। अस्माभिः परीक्षितव्यम्।
अंशुः	अहं ५६ इति संख्याम् एवं लेखितुं शक्नोमि = १४ × ४ तथा ६३ = २१ × ३। अतः १४ तथा ४ इति संख्याद्वयं ५६ इत्यस्य भाजकम् अस्ति। ततःपरं, २१ तथा ३ इति संख्याद्वयं ६३ इत्यस्य भाजकम् अस्ति। अत्र उभययोः सामान्यभाजकं किमपि नास्ति। अतः एते सह-अभाज्यसंख्ये स्तः।
गुणः	तिष्ठतु। अहं ५६ इति संख्याम् एवमपि लेखितुं शक्नोमि = ७ × ८ तथा ६३ = ९ × ७। वयं पश्यामः यद् अत्र ७ इति उभययोः संख्ययोः सामान्यभाजकं भवति। अतः एते सह-अभाज्यसंख्ये न भवितुं शक्नुतः।

अत्र स्पष्टम् अस्ति यग् गुणः इत्येषः सम्यक् उक्तवान् अस्ति यतो हि ७ इति उभययोः सामान्य-भाजकम् अस्ति।

परन्तु अंशुः कुत्र दोषं कृतवान्?

५६ = १४ × ४ इत्येवंप्रकारेण लेखनेन १४ तथा ४ इति उभौ अपि ५६ इत्यस्य भाजके स्तः इति प्रतीयते। परन्तु तत् ५६ इत्यस्य सर्वान् भाजकान् न वदति। ६३ इत्यस्य विषये अपि तथैव अस्ति।

अन्यम् उदाहरणम् स्वीकुर्वन्तु - ८० तथा ६३। अत्र उभौ अपि संख्ये लेखितुं विविधोपायाः सन्ति।

८० = ४० × २ = २० × ४ = १०× ८ = १६ × ५ = ???

६३ = ९ × ७ = ३ × २१ = ???

एतेषाम् उपायानामतिरिक्तमपि अन्यैः विविधमार्गैः एते संख्ये लेखितुं शक्यते। अतः तद् बोधयितुं ??? इति चिह्नं प्रयुक्तमस्ति। परन्तु यदि वयं ८० = १६ × ५ तथा ६३ = ९ × ७ इत्येवंरूपेण लिखामः नाम ८० इत्यस्य कृते १६ एवञ्च ५ तथा ६३ इत्यस्य कृते ९ एवञ्च ७ इति भाजकानि स्वीकुर्मः, तर्हि उभययोः कृते वयं किमपि सामान्य-भाजकं न प्राप्नुमः। तदा ८० तथा ६३ इति सह-अभाज्यसंख्ये, न वा इति कथं निर्णेतुं शक्नुमः? यथा, अंशुः दोषं कृतवान्, अतः वयं निश्चयेन वक्तुं न शक्ताः। कारणं हि तत्र संख्यानां गणनाय अन्यानि बहूनि मार्गानि भवेयुः।

तस्माद् द्वे संख्ये सह-मौलिकसंख्ये, न वा इति परीक्षयितुं इतोऽपि अधिक-व्यवस्थितोपायस्य आवश्यकता अस्ति।

मौलिकसंख्यायाः गुणकीकरणम्

५६ इति संख्यां स्वीकुर्मः। एषा समसंख्या अस्ति। यथा वयं पूर्वं दृष्टवन्तः, ५६ इति संख्याम् एवं लेखितुं शक्यते - **५६ = ४ × १४** ... अतः ४ एवञ्च १४ इति द्वे संख्ये ५६ इत्यस्य भाजके स्तः। अधुना एतेषु एकं यथा, १४ इति संख्यां स्वीकुर्वन्तु। एषा अपि समसंख्या अस्ति तथा च एवं लेखितुं शक्यते - १४ = २ × ७ । अतः, **५६ = ४ × २ × ७** । अधुना, ४ इति समसंख्या अस्ति तथा च एवं विभज्य लेखितुं शक्यते ४ = २ × २। अतः, **५६ = २ × २ × २ × ७** । अत्र दृश्यमानानि सर्वाणि भाजकानि नाम २ तथा ७ इति द्वे संख्ये मौलिक-संख्ये स्तः। अतः, वयं ते इतोऽपि विभाजयितुं न शक्नुमः।

निष्कर्षरूपेण, वयं ५६ इति संख्याम् अभाज्यसंख्यानाम् उत्पादरूपेण लिखितवन्तः। इयं प्रक्रिया अभाज्य-गुणनखण्ड-विधिः (**मौलिक-गुणकीकरणम्**) इति उच्यते। अत्र प्रत्येकं भाजकम् वयम् अभाज्य-गुणनखण्डः इति वक्तुं शक्नुमः। उदाहरणार्थं, ५६ इत्यस्य कृते २ एवञ्च ७ इति द्वौ अभाज्य-गुणनखण्डौ स्तः।

१ इत्यस्य अपेक्षया बृहत्तरायां प्रत्येकस्यां संख्यायाम् एकः अभाज्य-गुणनखण्डः भवति। नियमः समानः एव अस्ति - तत्र समसंख्याः भाजकेषु क्रमशः विभाजयन्तु। अन्ते केवलम् अभाज्य-संख्याः एव अवशिष्टाः भवन्ति।

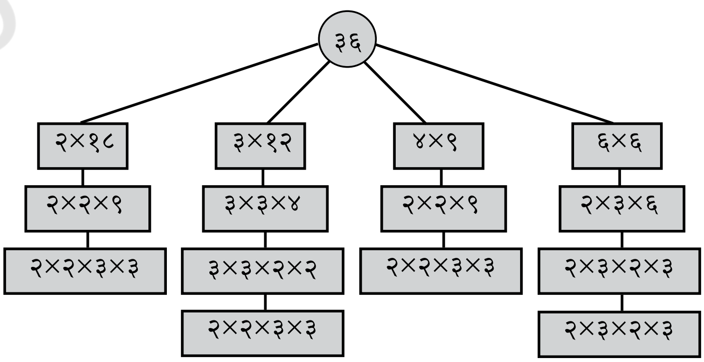
तत्र १ संख्यायाः कोऽपि मौलिक-गुणनखण्डः नास्ति। १ संख्या कयापि मौलिकसंख्याद्वारा विभाज्यं न भवति।

७ सदृशीनाम् अभाज्य-संख्यानाम् अभाज्य-गुणनखण्डः कः भवति? केवलं ७ एव भवति (वयं तां संख्याम् इतोऽपि विभाजयितुं न शक्नुमः)।

इदानीम् इतोऽपि कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

समसंख्याः विभाज्य लेखनस्य प्रक्रियाम् अनुसृत्य वयं ६३ इति संख्याम् एवं लेखितुं शक्नुमः - ६३ = ३ × ३ × ७ अथवा ३ × ७ × ३। किम् एताः भिन्नाः सन्ति? वस्तुतः न! तत्र उभयस्मिन् स्थले ३ तथा ७ इति मौलिक-संख्ये स्तः। उभयत्र ३ इति संख्या द्विवारम् आगच्छति ७ इति संख्या च एकवारम् आगच्छति।

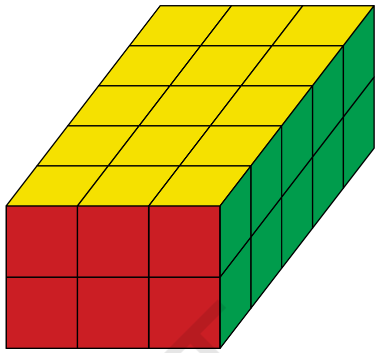
अत्र भवन्तः ३६ इत्यस्य कृते मौलिकगुणनखण्डं प्राप्तुं चत्वारि भिन्नानि मार्गाणि पश्यन्ति। तानि सर्वाणि अवलोकयन्तु। सर्वत्र वयं २ इति संख्यां द्विवारं ३ इति संख्यां च द्विवारं प्राप्स्यामः।



इदानीम् अभाज्य-गणनखण्ड-विधिम् अनुसृत्य ३६ इति संख्यां भाजकेषु विभाज्य अभाज्य-गुणनखण्डान् निर्मान्तु।

कस्यापि संख्याः कृते एतत् तथ्यं अवश्यमेव स्मरणीयं यत् तत्र केवलम् एकः एव मौलिक-गुणनखण्डः भवति। परन्तु तान् गुणनखण्डान् भिन्नभिन्नरूपेण प्राप्तुं शक्यते। यथा वयं अधो दर्शितवन्तः, अत्र क्रमः महत्त्वपूर्णः नास्ति। यथा वयम् एतेषु उदाहरणेषु दृष्टवन्तः, तत्र मौलिक-गुणनखण्डान् प्राप्तुं विविधाः मार्गाः सन्ति!

किमत्र क्रमः महत्त्वपूर्णः अस्ति?



अस्य रेखाचित्रस्य उपयोगः कृत्वा किं भवान्/भवती व्याख्यातुं शक्नोति यत् किमर्थं **३० = २ × ३ × ५ इति भवति ?** वस्तुतः अत्र क्रमः तथा महत्त्वपूर्णः नास्ति। २, ३, तथा ५ इति संख्याः येन केनापि क्रमेण सज्जीकर्तुं शक्यते।

यदा वयं संख्याः भाजकेषु विभाज्य लिखामः, तदा येन केनापि क्रमेण वयम् एतत् कर्तुं शक्नुमः। अन्ते फलं समानमेव भवति। अतः यदा वयं ३६ इति संख्यां २ एवञ्च ३ इति भाजकेषु विभाज्य लिखामः तदा येन केनापि क्रमेण २ इति संख्यां द्विवारं ३ इति संख्यां च द्विवारं लिखामः, ३६ इत्येव प्राप्स्यामः। अग्रिमकक्षासु वयं 'क्रमविनिमेयता तथा साहचर्यता' (**कम्यूटेटिविटी एन्ड असोसियेटिविटी आफ माल्टिप्लिकेशन्**) इत्यस्य अन्तर्गतं अस्मिन् विषये विस्तृतम् अध्ययनं करिष्यामः।.

तस्मात् क्रमः महत्त्वपूर्णः नास्ति। सामान्यतया वयं अभाज्यसंख्याः आरोहणक्रमेण लिखामः। उदाहरणार्थं, २२५ = ३ × ३ × ५ × ५ अथवा ३०० = २ × ३ × ५ ।

द्वयोः संख्ययोः उत्पादरूपेण कस्याश्चित् संख्यायाः मौलिक-गुणनखण्डः

यदा वयं कस्याश्चित् संख्यायाः कृते अभाज्य-गुणनखण्डम् अन्विष्यामः, तदा आदौ वयं तां संख्यां द्वयोः भाजकयोः उत्पादरूपेण लिखामः। उदाहरणार्थं, ७२ = १२ × ६। ततःपरं, वयं प्रत्येकस्य भाजकस्य कृते मौलिक-गुणनखण्डम् अन्विष्यामः। उपरि प्रदत्ते उदाहरणे, १२ = २ × २ × ३ तथा च ६ = २ × ३। इदानीं, ७२ इत्यस्य मौलिक-गुणनखण्डः कः भवति इति वक्तुं शक्यते वा?

सः मौलिक-गुणनखण्डःएवं भवति -

७२ = २ × २ × ३ × २ × ३

वयं तद् एवमपि लेखितुं शक्नुमः - २× २ × २ × ३ × ३। गुणनं कृत्वा परीक्षयन्तु। भवन्तः ७२ इत्येव प्राप्स्यन्ति!

लक्षयन्तु यत् कथम् ७२ इत्यस्य गुणनखण्डे प्रत्येकं अभाज्य-गुणनखण्डः बहुवारम् आगच्चति इति।

अपि च १२ तथा ६ इत्येतयोः संयुक्त-गुणनखण्डेषु तत् प्रत्येकं अभाज्य-गुणनखण्डः कतिवारम् आगच्छति इति अन्विष्य तुलनां कुर्वन्तु।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. अधोलिखितसंख्यानाम् अभाज्य-गुणनखण्डम् अन्विष्य लिखन्तु - ६४, १०४, १०५, २४३, ३२०, १४१, १७२८, ७२९, १०२४, १३३१, १००० इति।

२. अस्याः संख्यायाः मौलिक-गुणनखण्डे २ इति संख्या एकवारं, ३ इति संख्या द्विवारं तथा च ११ इति संख्या एकवारम् अस्ति। तर्हि, सा संख्या का अस्ति?

३. तादृशीः तिस्रः मौलिक-संख्याः अन्विष्यन्तु, याः ३० इत्यतः न्यूनाः भवन्ति तथा च यासां प्रत्येकस्याः अंकानाम् उत्पादः १९५५ इति अस्ति।

४. गुणनं विना एतेषां संख्यानां मौलिक-गुणनखण्डः ज्ञातव्यः।

५. तादृशी लघुतमा संख्या का अस्ति, यस्याः मौलिक-गुणनखण्डे एते भवन्ति -

  क. तिस्रः भिन्नाः अभाज्यसंख्याः?

  ख. चतस्रः भिन्नाः अभाज्यसंख्याः वा?

संख्यानाम् अध्ययनस्य क्षेत्रे अभाज्य-गुणनखण्डः इति मूलभूतविषयस्य अत्यन्तं महत्त्वं वर्तते। अस्य द्वयोः उपयोगयोः विषये अधुना चर्चां कुर्मः।

मौलिक-गुणनखण्डमुपयुज्य द्वयोः संख्ययोः सह-मौलिक-संख्यात्वविचारः

वयम् एकवारं पुनः ५६ एवञ्च ६३ इति संख्याद्वयं स्वीकुर्मः। यदि ते सह-अभाज्यसंख्ये स्तः, तर्हि वयं कथं परीक्षयितुं शक्नुमः? अत्र वयम् उभययोः संख्ययोः अभाज्य-गुणनखण्डम् उपयोक्तुं शक्नुमः -

५६ = २ × २ × २ × ७ तथा ६३ = ३ × ३ × ७

इदानीं वयं पश्यामः यत् ७ इति संख्या ५६ इत्यस्य अभाज्यगुणनखण्डः अस्ति। अपि च सा ६३ इत्यस्य अपि अभाज्यगुणनखण्डः अस्ति। अस्ति। अतः ५६ एवञ्च ६३ इति संख्याद्वयं सह-अभाज्यसंख्या नास्ति।

एवं ८० एवञ्च ६३ इत्येतयोः विषये कथं परीक्षयामः? तेषाम् अभाज्य-गुणनखण्डः एवं भवति -

८० = २ × २ × २ × २ × ५ तथा ६३ = ३ × ३ × ७

अत्र द्वयोः कोऽपि सामान्य-अभाज्यगुणनखण्डः नास्ति। तर्हि किं वयम् अस्माद् एवं निष्कर्षं कर्तुं शक्नुमः यत् ८० एवञ्च ५६ इति संख्याद्वयं सह-अभाज्यसंख्या अस्ति इति? ८० एवञ्च ५६ इत्येतयोः सामान्य-समसंख्याक-भाजकेषु याः अभाज्य-संख्याः आगच्छन्ति, ताः अभाज्य-गुणनखण्डे अपि आगच्छन्ति वा ?

अतः, वयं वक्तुं शक्नुमः यद् द्वयोः संख्ययोः यदि कोऽपि सामान्य-अभाज्य-गुणनखण्डः नास्ति, तर्हि तत् संख्याद्वयम् सह-अभाज्यं भवति।

अस्माभिः कानिचन उदाहरणानि द्रष्टव्याणि।

उदाहरणम् - ४० तथा २३१ इत्येतयोः विषये विचारयन्तु। तेषाम् अभाज्य-गुणनखण्डः एवम् अस्ति-

४० = २ × २ × २ × ५ तथा २३१ = ३ × ७ × ११

वयं पश्यामः यत् ४० एवञ्च २३१ इत्येतयोः कोऽपि सामान्य-भाजकः नास्ति। ४० इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डः २ तथा ५ इति अस्ति। यदा तु २३१ इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डः ३, ७ तथा ११ इति अस्ति। अतएव ४० एवञ्च २३१ इति संख्याद्वयम् सह-अभाज्यम् अस्ति!

उदाहरणम् -: २४२ तथा १९५ इत्येतयोः विषये विचारयन्तु। तेषाम् अभाज्य-गुणनखण्डः एवम् अस्ति -

२४२ = २ × ११ × ११ तथा १९५ = ३ × ५ × १३

वयं पश्यामः यत् २४२ इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डः २ तथा ११ इति अस्ति। यदा तु १९५ इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डः ३, ५ तथा १३ इति अस्ति। तस्माद् द्वयोः कोऽपि सामान्य-अभाज्य-गुणनखण्डः नास्ति। अतएव २४२ एवञ्च १९५ इति संख्याद्वयम् सह-अभाज्यम् अस्ति!

मौलिक-गुणनखण्डमुपयुज्य एकस्याः संख्यायाः संख्यान्तरेण विभाज्यताविचारः

यदि एकः अङ्कः अन्येन विभाज्यते तर्हि द्वितीय-अङ्कस्य अभाज्य-गुणनखण्डः प्रथम-अङ्कस्य अभाज्य-गुणनखण्डे अन्तर्भवति इति वयं वक्तुं शक्नुमः।

४८ इति संख्या १२ संख्याद्वारा विभाज्यम् अस्ति यतः यदा वयं ४८ इति संख्या १२ इत्यनेन विभाजयामः तदा ० इति अवशिष्टं भवति। दीर्घविभाजनं विना काऽपि संख्या अन्यया विभाज्यमस्ति, न वा इति कथं परीक्षयितुं शक्नुमः?

उदाहरणम् - १६८ इति संख्या १२ इति संख्याद्वारा विभाज्यमस्ति वा? उभययोः कृते अभाज्य-गुणनखण्डम् अन्विष्यन्तु।

१६८ = २ × २ × २ × ३ × ७ तथा १२ = २ × २ × ३

यतो हि वयं केनापि क्रमेण एतान् गुणनखण्डान् सज्जीकर्तुं शक्नुमः, अतः इदानीं स्पष्टम् अस्ति यत्,

१६८ = २ × २ × ३ × २ × ७ = १२ × १४

अतः १६८ इति संख्या १२ इत्यनया संख्यया विभाज्यम् अस्ति।

उदाहरणम् - ७५ इति संख्या २१ इति संख्याद्वारा विभाज्यमस्ति वा? उभययोः कृते अभाज्य-गुणनखण्डम् अन्विष्यन्तु।

७५ = ३ × ५ × ५ तथा २१ = ३ × ७

यथा वयं उपरि दृष्टवन्तः, यदि ७५ इति संख्या २१ इत्यस्य गुमितं भवति, तर्हि २१ इत्यस्य सर्वे अभाज्य-गुणनखण्डाः ७५ इत्यस्यापि अभाज्य-गुणनखण्डाःभविष्यन्ति। तथापि, अत्र ७ इति संख्या, या २१ इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डः अस्ति , सा ७५ इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डः नास्ति। अतः, ७५ इति संख्या २१ इत्यनया संख्या विभाज्यं नास्ति।

उदाहरणम् - ४२ इति संख्या १२ इति संख्याद्वारा विभाज्यमस्ति वा? उभययोः कृते अभाज्य-गुणनखण्डम् अन्विष्यन्तु -

$$४२ = २ \times ३ \times ७ \text{ तथा } १२ = २ \times २ \times ३$$

अत्र १२ इत्यस्य सर्वे अभाज्य-गुणनखण्डाः ४२ इत्यस्यापि अभाज्य-गुणनखण्डाः सन्ति। परन्तु १२ इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डः ४२ इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डे न अन्तर्भवति। यतो हि १२ इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डे २ इति संख्या द्विवारम् आगच्छति, परन्तु ४२ इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डे केवलम् एकवारम् आगच्छति। अतएव ४२ इति संख्या १२ इति संख्याद्वारा विभाज्यं नास्ति। अतः यदि एकः अङ्कः अन्येन विभाज्यते तर्हि द्वितीय-अङ्कस्य अभाज्य-गुणनखण्डः प्रथम-अङ्कस्य अभाज्य-गुणनखण्डे अवश्यमेव अन्तर्भवति इति वयं निष्कर्षं कर्तुं शक्नुमः।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. अधोलिखितानि संख्यानां युग्मानि सह-अभाज्यानि सन्ति वा? तत्रादौ उत्तरम् अनुमाय ततः अभाज्य-गुणनखण्डस्य विधिम् उपयुज्य तस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

क) ३० तथा ४५   ख) ५७ तथा ८५

ग) १२१ तथा १३३१   घ) ३४३ तथा २१६

२. अत्र प्रथमसंख्या द्वितीयया विभाज्यमस्ति वा?अभाज्य-गुणनखण्डस्य विधिम् उपयुज्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

क) २२५ तथा २७   ख) ९६ तथा २४

ग) ३४३ तथा १७   घ) ९९९ तथा ९९

३. प्रथमसंख्यायाः अभाज्य-गुणनखण्डः अस्ति $२ \times ३ \times ७$ तथा च द्वितीयसंख्यायाः अभाज्य-गुणनखण्डः अस्ति $३\times ७\times ११$ । एतत् संख्याद्वयं सह-अभाज्यम् अस्ति वा? तयोरेका अन्यया विभाज्यम् अस्ति वा ?

४. गुनः इत्येषः वदति, “द्वे अभाज्यसंख्ये सह-अभाज्य-संख्ये अपि भवतः वा ?” सः यथार्थः अस्ति वा?

५.५ संख्यानां विभाज्यतापरीक्षा

एतावत्पर्यन्तं, वयं भिन्न-भिन्न-सन्दर्भेषु संख्यानां भाजकानि अन्विष्टवन्तः। काचन संख्या अभाज्यं, न वा, द्वयोः संख्ययोः युग्मं सह-अभाज्यं, न वा इत्यादिविषयानपि वयं ज्ञातवन्तः।

लघुसङ्ख्यानां कारकाणि अन्वेष्टुं सुलभं भवति। बृहत् सङ्ख्यायाः कारकाणां अन्वेषणं वयं कथं करिष्यामः?

अस्माभिः ८५६० स्वीकरोतु। २ तः १० पर्यन्तं (२,३,४,) किमपि कारकं भवति वा? ५, ..., ९, १०)?

एतेषां सङ्ख्यासु कानिचन कारकाणि सन्ति वा दीर्घविभाजनस्य विना न सन्ति वा इति द्रष्टुं सुलभं भवति। भवान् तान् अन्वेष्टुं शक्नोति वा?

१० संख्यायाः विभाज्यता

एहि, वयम् १० स्वीकुर्मः। किं ८५६० इति संख्या १० इत्यनया विभाज्या अस्ति? एषः अन्यः मार्गः अस्ति। पृच्छतु यदि १० इति ८५६० इत्यस्य कारकं भवति।

अस्य कृते, वयं १० गुणितेषु विन्यासं द्रष्टुं शक्नुमः।

१० इत्यस्य प्रथमाः कतिपयाः गुणकाः सन्ति-१०,२०,३०,४०। एतत् क्रमं अनुवर्तयन्तु तथा प्रतिरूपं पश्यन्तु।

१० इत्यस्य बहुविधस्य १२५ अस्ति वा? पूर्वक्रमेण एतत् सङ्ख्या दृश्यते वा? किमर्थं वा किमर्थं न वा?

८५६० १० द्वारा विभक्तं भवति वा इति अधुना भवान् उत्तरं दातुं शक्नोति वा?

इदं वक्तव्यं विचारयतु।

१० द्वारा विभक्ताः सङ्ख्याः ते सन्ति ये '०' इत्यनेन समाप्ताः भवन्ति। किं भवान् सहमतः अस्ति?

गणित कथा

५ संख्यायाः विभाज्यता

५ क्रमाङ्कः अन्यः क्रमाङ्कः यस्य विभाजकतायाः परीक्षणं सरलतया कर्तुं शक्यते। वयं कथं करिष्यामः?

गुणकानां सूचीकरणद्वारा अन्वेषयतु-५,१०,१५,२०,२५,.. एतेषां सङ्ख्यानां विषये भवान् किं पश्यति? किं भवान् अन्तिम-अङ्कस्य विन्यासं पश्यति?

३९९ तः न्यूनाः बृहत्तमाः सङ्ख्याः काः सन्ति या ५ द्वारा विभक्ता अस्ति? ५ द्वारा ८५६० विभक्तः अस्ति वा?

इदं वक्तव्यं विचारयतु।

५ द्वारा विभक्ताः सङ्ख्याः तानि सन्ति यानि '०' अथवा '५' इत्यनेन समाप्यन्ते। किं भवान् सहमतः अस्ति?

गणित कथा

२ संख्यायाः विभाज्यता

२ इत्यस्य प्रथमेषु कतिपयेषु गुणितेषु २,४,६,८,१०,१२,१४,१६,१८,२० च सन्ति। भवान् किं निरीक्षति? किं भवान् अन्तिम-अङ्कस्य विन्यासं पश्यति?

२ द्वारा ६८२ विभाज्यम् अस्ति वा? दीर्घविभाजनस्य विना वयं अस्य उत्तरं दातुं शक्नुमः वा?

किम् ८५६० २ द्वारा विभक्तम् अस्ति? किमर्थं वा किमर्थं न वा?

इदं वक्तव्यं विचारयतु।

संख्याः ये २ द्वारा विभक्ताः ते ते ये '०', '२', '४', '६', अथवा '८', इति समाप्यन्ते। किं भवान् सहमतः अस्ति?

गणित कथा

३९९ तथा ४११ मध्ये २ गुणितेषु सर्वाः काः?

४ संख्यायाः विभाज्यता

यदि एकं सङ्ख्या ४ द्वारा विभज्यते तर्हि परीक्षणं सरलतया कर्तुं शक्यते!

तस्य गुणकेषु पश्यन्तुः ४, ८, १२, १६, २०, २४, २८, ३२ इति।

किं भवान् किमपि प्रतिरूपं द्रष्टुं शक्नोति यत् उपयोक्तुं शक्यते? १०, ५ तथा २ इति गुणितेषु तेषां अन्तिमेषु अङ्केषु एकः विन्यासः अस्ति, यस्य उपयोगेन वयं विभाजकतायाः परीक्षणं कर्तुं शक्ताः। तथैव, अन्तिम-अङ्कं दृष्ट्वा ४ सङ्ख्यया विभक्ता अस्ति वा इति वयं द्रष्टुं शक्नुमः वा?

तत् कार्यं न करोति! पश्यतु १२ तथा २२। ते समानं अन्तिमं अङ्कं धारयन्ति, परन्तु १२ इति ४ इत्यस्य गुणितं भवति, २२ इति नास्ति। तथैव १४,२४ च समानं अन्तिमं अङ्कं धारयन्ति, परन्तु १४ इति ४ इत्यस्य बहुगुणितं नास्ति, यदा तु २४ इति। तथैव, १६ तथा २६ अथवा १८ तथा २८। अस्य अर्थः अस्ति यत् अन्तिम-अङ्कं दृष्ट्वा, वयं कथयितुं न शक्ताः यत् ए-सङ्ख्या ४ इत्यस्य बहुविध-सङ्ख्या अस्ति वा इति।

अधिक-अङ्कान् दृष्ट्वा वयं प्रश्नस्य उत्तरं दातुं शक्नुमः वा? १ तः २०० पर्यन्तं ४ गुणितानां सूचीं कृत्वा प्रतिरूपं अन्विष्यतु।

३३० तः ३४० पर्यन्तं सङ्ख्याः अन्विष्यतु यानि ४ द्वारा विभक्ताः सन्ति। अपि च, १७३० तः १७४० पर्यन्तं, २०३० तः २०४० पर्यन्तं च सङ्ख्याः प्राप्नुयात्, यानि ४ द्वारा विभक्ताः सन्ति। भवान् किं निरीक्षति?

४ द्वारा ८५३६ विभाज्यम् अस्ति वा?

एतान् कथनान् विचारयतु।

१. केवलं अन्तिम-द्वि-अङ्क-विषये एव यदा निर्धारितं भवति यत् यदि दत्तसङ्ख्या ४ द्वारा विभज्यते इति।
२. यदि अन्तिमद्वितीय-अङ्कैः निर्मितः अङ्कः ४ द्वारा विभाज्यते तर्हि मूल-अङ्कः ४ द्वारा विभाज्यते।
३. यदि मूलसङ्ख्या ४ द्वारा विभाज्यते तर्हि अन्तिमद्वितीय-अङ्कैः निर्मितसङ्ख्या ४ द्वारा विभाज्यते।

किं भवान् सहमतः अस्ति? किमर्थं वा किमर्थं न वा?

८ संख्यायाः विभाज्यता

चित्ताकर्षकतया, ८ द्वारा अपि विभाजनक्षमतायाः परीक्षणं सरलीकर्तुं शक्यते। अन्तिमद्वयं अङ्कं अस्य कृते उपयोक्तुं शक्यते वा?

- १२० तः १४० पर्यन्तं सङ्ख्याः अन्विष्यतु यानि ८ द्वारा विभज्यन्ते। ११२० तः ११४० पर्यन्तं, ३१२० तः ३१४० पर्यन्तं च सङ्ख्याः अपि प्राप्नुयात्, यानि ८ द्वारा विभक्ताः सन्ति। भवान् किं निरीक्षति?

- ल्याज़् इत्येतान् परिवर्तयतु ।टी इति द्वि-अङ्कीयः ८५६० अस्ति, अतः परिणाम-सङ्ख्या ८ तः बहुविध-सङ्ख्या अस्ति।

- एतान् कथनान् विचारयतु।

  १. केवलं अन्तिम-त्रि-अङ्क-विषये एव, यदा निर्धारितं भवति यत् यदि दत्तसङ्ख्या ८ द्वारा विभज्यते इति।

  २. यदि अन्तिमेन त्रिभिः अङ्कैः निर्मितः अङ्कः ८ अङ्कैः विभाज्यते तर्हि मूलसङ्ख्या ८ अङ्कैः विभाज्यते।

  ३. यदि मूलसङ्ख्या ८ द्वारा विभाज्यते तर्हि अन्तिमत्रिंशतिभिः अङ्कैः निर्मितसङ्ख्या ८ द्वारा विभाज्यते।

  किं भवान् सहमतः अस्ति? किमर्थं वा किमर्थं न वा?

गणित कथा

वयं दृष्टवन्तः यत् दीर्घविभाजनस्य सर्वदा परीक्षणस्य आवश्यकता नास्ति यदि एकः सङ्ख्या एकः कारकः अस्ति वा न वा इति। १०,५,२,४,८ कृते सरलपद्धतीभिः सह आगन्तुं कतिपयानि निरीक्षणानि वयं प्रयुज्यामः। अन्यानां सङ्ख्यानां कृते एतादृशाः सरलपद्धतीः सन्ति वा? ३,६,७,९ इति श्रेण्याः विभाजनं परीक्षयितुं सरलपद्धतीनां विषये वयं चर्चां करिष्यामः।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. २०२४ लीप्-वर्षम् अस्ति (यतः फेब्रुवरी-मासे २९ दिनानि सन्ति)। लीप्-वर्षाणि ४ वर्षेषु भवन्ति, परन्तु तेषु वर्षेषु १०० वर्षेषु विभक्ताः भवन्ति, परन्तु ४०० वर्षेषु न भवन्ति।

   क) यस्मात् वर्षात् भवतः जन्म अभवत्, इदानीं, यस्मात् वर्षाणि अधिवर्षाणि आसन्?

   ख) वर्षात् २०२४ पर्यन्तं २०९९ पर्यन्तं, कति अधिवर्षाणि सन्ति?

२. ४ अङ्कैः विभक्ताः बृहत्तमाः लघुतमाः च ४-अङ्कयुक्ताः सङ्ख्याः अन्विष्यतु, तथा च पालिण्ड्रोम्स् अपि सन्ति।

३. प्रत्येकं वक्तव्यं सर्वदा सत्यम् अस्ति वा, कदाचित् सत्यम् अथवा कदापि सत्यम् अस्ति वा इति अन्वेष्टुं ज्ञातुं च शक्नोति। भवान् स्वविधेः समर्थनाय उदाहरणानि दातुं शक्नोति।

क. द्वयोः समसङ्ख्याभ्यां ४ इत्यस्य बहुविधसङ्ख्या प्राप्यते।

ख. द्वयोः विषम-सङ्ख्ययोः योगः ४ इत्यस्य बहुविधम् जनयति।

४. यदा निम्नलिखिताः सङ्ख्याः प्रत्येकं क) १०, ख) ५, ग) २ द्वारा विभक्ताः भवन्ति तदा अवशिष्टानि अन्विष्यतु।

७८, ९९, १७३, ५७२, ९८०, ११११, २३४५

५. शिक्षकः पृष्टवान् यत् यदि १४५६० सर्वैः २, ४, ५, ८, १० इत्येतैः विभाज्यते इति। एतेषां सङ्ख्याद्वयेन एव गुणविशेषतायाः कृते गुणः १४५६० परीक्षितः, ततः तेषां सर्वैः अपि विभाज्यः इति घोषितः। तानि संख्याद्वयं किं भवितुम् अर्हति?

६. निम्नलिखिताः सङ्ख्याः २, ४, ५, ८, १० : ५७२, २३५२, ५६००, ६०००, ७७६२२१६० इति सर्वैः विभक्ताः सन्ति।

७. द्वौ सङ्ख्याः लिखतु ययोः उत्पादः १०,००० अस्ति। द्वयोः अङ्कयोः ० न भवेत् यथा एकक-अङ्कः।

५.६ संख्याभिः सह विनोदः

विशिष्टाः संख्याः

अस्यां पेटिकायां चत्वारः संख्याः सन्ति। का संख्या भवतः कृते विशेषा दृश्यते? किमर्थं भवान् एवं वदति?

९	१६
२५	४३

गुन्ना इत्यस्य सहपाठिनः किं निवेदयन्ति इति पश्यन्तुः

- कर्नावती वदति, " ९ विशेषम् अस्ति यतो हि तत् एक-अङ्कीय-सङ्ख्या अस्ति यत्र अन्ये सर्वे २-अङ्कीय-सङ्ख्याः सन्ति" इति।
- गुरुप्रीत् वदति, " ९ विशेषम् अस्ति यतः एतत् एकमात्रं सङ्ख्या अस्ति यत् ३ इत्यस्य बहुविधम् अस्ति" इति।
- मुरुगनः वदति, " १६ विशेषम् अस्ति यतः एतत् केवलं ४ इत्यस्य बहुसङ्ख्यकम् अपि च केवलं बहुसङ्ख्यकम् अपि अस्ति" इति।
- गोपिका वदति, " २५ विशेषम् अस्ति यतः एतत् केवलं ५ इत्यस्य बहुविधम् अस्ति" इति।
- यङ्नीकी वदति, " ४३ विशेषम् अस्ति यतः तत् एकमात्रं मौलिक-संख्या अस्ति" इति।
- राधा वदति, " ४३ विशेषम् अस्ति यतः एतत् एकमात्रं सङ्ख्या अस्ति यत् वर्गः नास्ति" इति।

गणित कथा

प्रत्येकस्मिन् पेटिकायां चतुर्णां सङ्ख्यायुक्तानि कानिचन पेटिकानि सन्ति। प्रत्येकम् अङ्कं विश्रान्त्या सह कथं विशिष्टं तुलनां करोति इति कथयितुं प्रत्येकं पेटिकां प्रयतताम्। भवतः सहपाठिन्या सह सहभागयन्तु तथा च अन्येन सह अन्विष्यतु यत् भवान् यत् कृतवान् तदनुगुणं एव कारणं दत्तवान्। भवतः कृते न भवितुम् अन्यानि कारणानि किमपि दातुं शक्नोति वा?!

५	७
१२	३५

३	८
११	२४

२७	३
१२३	३१

१७	२७
४४	६५

एका मौलिकी प्रहेलिका

गणित कथा

वामभागे एका प्रहेलिका वर्तते। दक्षिणभागे तस्याः प्रहेलिकायाः समाधानं प्रदत्तम् अस्ति। के नियमाः अस्याः प्रहेलिकायाः उत्तरप्रदाने सहायकाः भवन्तीति चिन्तयतु।

			७५
			४२
			१०२
१७०	३०	६३	

५	५	३	७५
२	३	७	४२
१७	२	३	१०२
१७०	३०	६३	

नियमाः

प्रत्येकं पङ्क्त्याः उत्पादः पङ्क्त्याः दक्षिणतः अङ्कः भवति तथा च प्रत्येकं स्तम्भस्य उत्पादः स्तम्भस्य अधः अङ्कः भवति इत्यतः एव मौलिक-संख्याभिः सरणीं पूरयतु।

			१०५
			२०
			३०
२८	१२५	१८	

			८
			१०५
			७०
३०	७०	२८	

			६३
			२७
			११०
४५	४२	१७१	

			३४३
			६६०
			४४
२८	१५४	२३१	

सारसंक्षेपः

- यदि एकः अङ्कः अन्येन विभाज्यते तर्हि द्वितीयः अङ्कः प्रथमस्य विभाज्यम् इति कथ्यते। उदाहरणार्थं, १२ इति संख्या ४ इत्यनेन विभाज्यते। अतः १२ इति संख्या ४ इत्यस्य विभाज्यम् अस्ति (१२ ÷ ४ = ३)।
- २,३,५,७,११ इत्येतादृश्यः संख्याः अभाज्यसंख्याः इति उच्यन्ते। एतादृशसंख्यानां केवलं द्वे भाजके स्तः, नाम १ तथा च सा संख्या स्वयमेव।
- ४,६,८,९, इत्येतादृश्यः संख्याः समसंख्याः इति उच्यन्ते। एतासां संख्यानाम् अनेकानि भाजकानि भवन्ति। तासां न्यूनातिन्यूनं एकसंख्यां विहाय तथा च स्वं परित्यज्य अन्यदेकं भाजकम् अवश्यमेव भवति। उदाहरणार्थं, ८ इत्यस्य ४ इति भाजकम् अस्ति तथा ९ इत्यस्य ३ इति भाजकम् अस्ति। अतः ८ तथा ९ इति उभयं समसंख्या अस्ति।
- १ संख्यातः बृहत्तरां कामपि संख्याम् अभाज्यसंख्यानाम् उत्पादरूपेण लेखितुं प्रकाशयितुं वा शक्यते । इयं प्रक्रिया अभाज्यसंख्यानां गुणनखण्डविधिः इति उच्यते। उदाहरणार्थं, ८४= २ × २ × ३ × ७ ।
- भाजकानां क्रमेण सज्जीकरणम् इत्यतिरिच्य संख्यायाः अभाज्यांशेषु गुणनखण्डनं निर्मातुम् एकः एव उपायः अस्ति।
- द्वयोः संख्ययोः यदि कोऽपि सामान्य-अभाज्य-गुणनखण्डः नास्ति, तर्हि तत् संख्याद्वयम् सह-अभाज्यं भवति।
- संख्याद्वयं सह-अभाज्यम् अस्ति, न वा इति परीक्षयितुम् आदौ तासां कोऽपि सामान्य-अभाज्य-गुणनखण्डः अस्ति, न वा इति अन्वेषणीयम्। यदि तयोः कोऽपि सामान्य-अभाज्य-गुणनखण्डः नास्ति तर्हि तत् संख्याद्वयं सह-अभाज्यम् अस्ति इति वक्तुं शक्नुमः। अन्यथा तत् संख्याद्वयं सह-अभाज्यं न भवति।
- यदि प्रथमसंख्यायाः अभाज्य-गुणनखण्डः द्वितीयसंख्यायाः अभाज्य-गुणनखण्डे समाविष्टः भवति तर्हि सा संख्या अन्यस्याः संख्यायाः भाजकं भवति इति वक्तुं शक्नुमः।