

गणितमा ढाँचाहरू



0674CH01

१.१ गणित भनेको के हो ?

गणित मुख्य रूपमा ढाँचाहरूको खोजी गर्ने कार्य हो र ती ढाँचाहरू किन अस्तित्वमा छन् भन्ने व्याख्या गर्ने प्रयास हो।

प्रकृतिमा, हाम्रो घर र स्कूलहरूमा अनि सूर्य, चन्द्रमा र ताराहरूको गतिमा — यस्ता नमुनाहरू वास्तवमा हाम्रो चारैतिर विद्यमान छन्। किनमेल र खाना पकाउने देखि लिएर बल फ्याँकेर र खेल खेल्ने, मौसमको ढाँचा बुझ्ने र प्रविधिको प्रयोग गर्ने सम्मका काम हरू हामीले गर्ने र देख्ने हरेक कुरामा तिनीहरू देखा पर्छन्।

ढाँचाहरू र तिनीहरूको व्याख्याको खोजी एक रमाइलो र रचनात्मक प्रयास हुन सक्छ। यही कारण गणितज्ञहरू गणितलाई कला र विज्ञान दुवै ठान्छन्। यस वर्ष, हामी आशा गर्दछौं कि तपाईंले गणितीय ढाँचाहरू पत्ता लगाउन र बुझ्नमा संलग्न रचनात्मकता र कलात्मकता हेर्ने मौका पाउनुहुनेछ।

यो मनमा राख्नु महत्त्वपूर्ण छ कि गणितको उद्देश्य केवल कुन ढाँचाहरू अवस्थित छन् भनेर पत्ता लगाउनु मात्र होइन, तर तिनीहरू किन अस्तित्वमा छन् भनेर व्याख्या गर्नु पनि हो। यस्ता व्याख्याहरू प्रायः अनुप्रयोगहरूमा प्रयोग गर्न सकिन्छ जुन प्रसङ्गमा तिनीहरू पत्ता लागेका थिए, जसले पछि अघि बढाउन मद्दत गर्न सक्छ। मानवता अगाडि बढ्छ।

उदाहरणका लागि, ताराहरू, ग्रहहरू र तिनीहरूका उपग्रहहरूको गतिको ढाँचाहरूको समझले मानव जातिलाई गुरुत्वाकर्षणको सिद्धान्त विकास गर्न प्रेरित गर्‍यो, जसले हामीलाई हाम्रो आफ्नै उपग्रहहरू प्रक्षेपण गर्न र चन्द्रमा र मंगलग्रहमा रकेटहरू पठाउन अनुमति दियो; त्यस्तैगरी, जीनोममा भएका ढाँचाहरू बुझाले रोगहरूको निदान र उपचार गर्न मद्दत गरेको छ — यस्ता अन्य हजारौं उदाहरणहरू मध्ये हो ।

☀ आउनुहोस्, पत्ता लगाऔं

1. के तपाईं अन्य उदाहरणहरू सोच्न सक्नुहुन्छ, जहाँ गणितले हाम्रो दैनिक जीवनमा हाम्रो सहायता गर्छ ?
2. गणितले मानवजातिलाई कसरी अघि बढाउन मद्दत गरेको छ ? (तपाईं ती उदाहरणहरूबारे मा सोच्न सक्नुहुन्छ, जहाँ वैज्ञानिक प्रयोगहरू गर्नु, आफ्नो अर्थव्यवस्था र लोकतन्त्र सञ्चालन गर्नु, पुल, घर वा अन्य जटिल संरचनाहरू निर्माण गर्ने, टिभी, मोबाइल फोन, कम्प्युटर, साइकल, रेल, कार, वायुयान, क्यालेन्डर, घडीहरू आदि बनाउने जस्ता उदाहरणहरू तपाईं सोच्न सक्नुहुन्छ)

गणित
चर्चा

१.२ संख्याहरूमा ढाँचाहरू

गणितमा हुने सबैभन्दा आधारभूत ढाँचाहरू मध्ये संख्याको ढाँचा, विशेष गरी पूर्ण संख्याहरूको ढाँचा हुन्:

0, १, २, ३, ४, ...

सम्पूर्ण संख्यामा ढाँचाहरू अध्ययन गर्ने गणितको शाखालाई **संख्या सिद्धान्त** भनिन्छ ।

सङ्ख्या अनुक्रम (sequences) गणितज्ञहरूले अध्ययन गर्ने सबैभन्दा आधारभूत र सबैभन्दा आकर्षक प्रकारका ढाँचाहरू मध्ये एक हुन् ।

तालिका १ ले गणितमा अध्ययन गरिएका केही कुञ्जी संख्या अनुक्रमहरू देखाउँदछ ।

तालिका १ : संख्या अनुक्रमका उदाहरणहरू

१, १, १, १, १, १, १, ...	(सबै १)
१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ...	(संख्या गणना गर्दै)
१, ३, ५, ७, ९, ११, १३, ...	(बिजोर संख्याहरू)
२, ४, ६, ८, १०, १२, १४, ...	(सम संख्याहरू)
१, ३, ६, १०, १५, २१, २८, ...	(त्रिकोणात्मक संख्याहरू)
१, ४, ९, १६, २५, ३६, ४९, ...	(वर्ग संख्याहरू)
१, ८, २७, ६४, १२५, २१६, ...	(घन संख्याहरू)
१, २, ३, ५, ८, १३, २१, ...	(विरहांक संख्याहरू)
१, २, ४, ८, १६, ३२, ६४, ...	(२ को शक्ति)
१, ३, ९, २७, ८१, २४३, ७२९, ...	(३ को शक्ति)

☀ आउनुहोस्, पत्ता लगाऔं

- के तपाईं तालिका १ मा दिइएका प्रत्येक क्रमहरूको ढाँचा चिन्ह सक्नुहुन्छ?
- तालिका १ का प्रत्येक क्रमलाई आफ्नो नोटबुकमा पुनः लेख्नुहोस् र प्रत्येक क्रममा आउने अर्को तीनवटा सङ्ख्या पनि लेख्नुहोस्! प्रत्येक क्रमपछि, आफ्नै शब्दमा क्रम निर्माण गर्ने नियम लेख्नुहोस्।

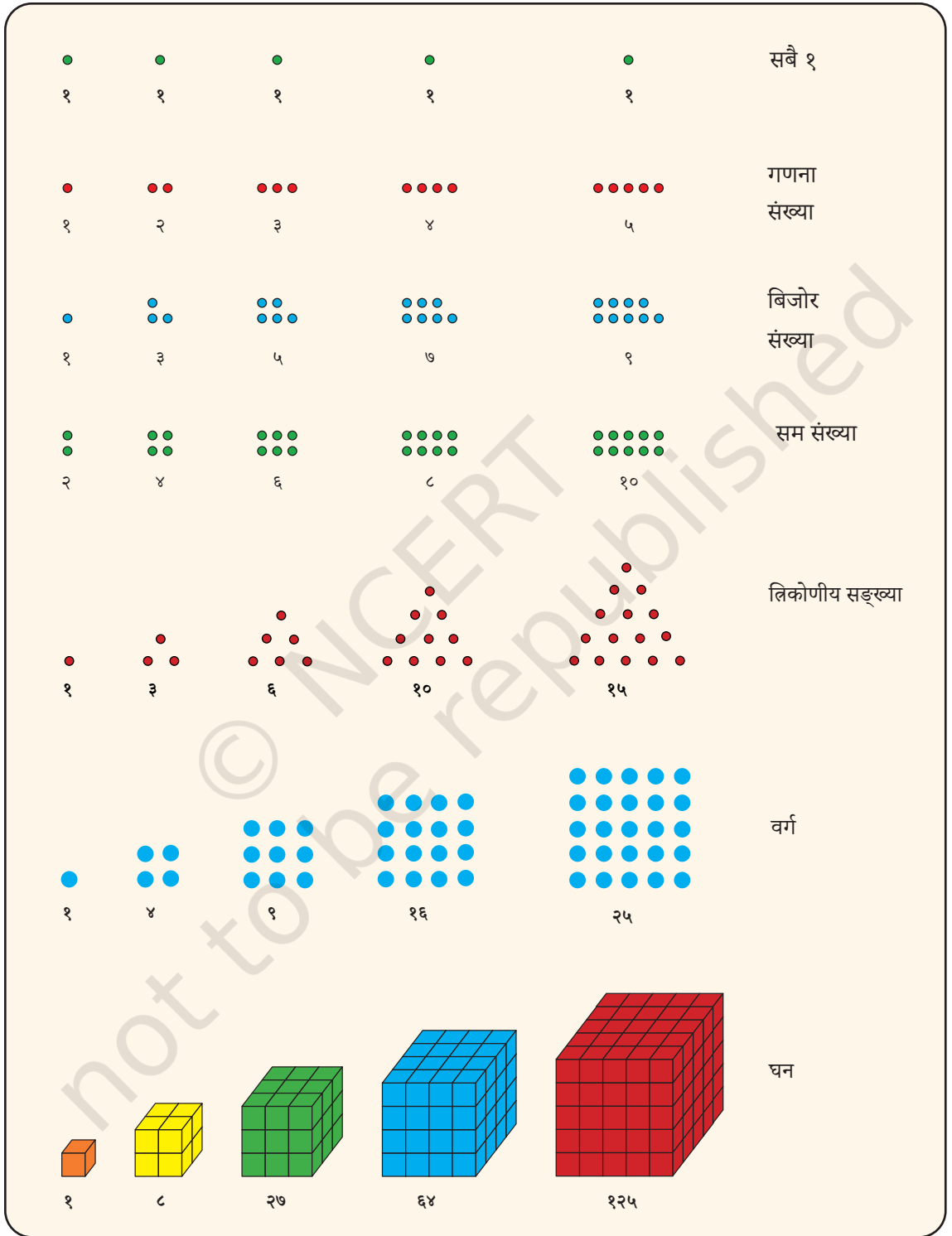
गणित
चर्चा

१.३ संख्या अनुक्रमहरूको दृश्य चित्रण

धेरै संख्या अनुक्रमहरूलाई चित्रहरूको प्रयोग गरेर कल्पना गर्न सकिन्छ। चित्र वा रेखाचित्रको माध्यमबाट गणितीय वस्तुहरूलाई कल्पना गर्नु गणितीय ढाँचा र अवधारणाहरू बुझ्ने एउटा धेरै फलदायी तरिका हुन सक्छ।

आउनुहोस्, तालिका १ मा पहिलो सात अनुक्रमहरूलाई निम्न चित्रहरूको प्रयोग गरेर प्रतिनिधित्व गरौं।

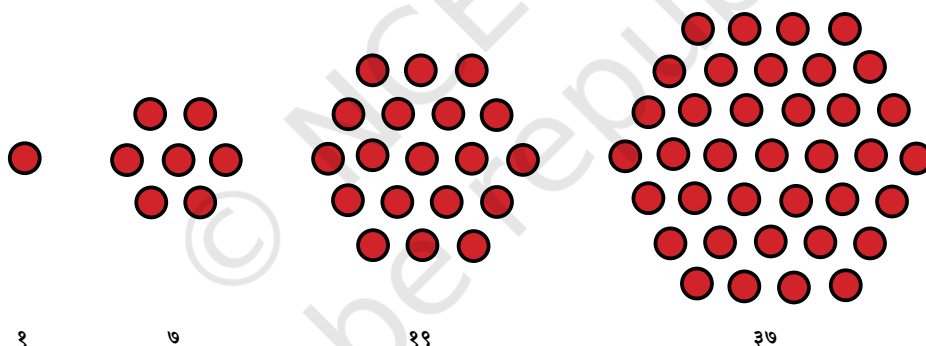
तालिका २ : केही संख्या अनुक्रमहरूको चित्रद्वारा प्रदर्शन



आउनुहोस्, पत्ता लगाऔं

१. तालिका २ मा दिइएका संख्या अनुक्रमहरूको चित्रमय प्रतिनिधित्वलाई आफ्नो नोटबुकमा नक्कल गर्नुहोस्, र प्रत्येक अनुक्रमको लागि अर्को चित्र बनाउनुहोस्!
२. १, ३, ६, १०, १५, ... लाई किन **त्रिकोणीय संख्याहरू** भनिन्छ? १, ४, ९, १६, २५, ... लाई किन **वर्ग संख्याहरू वा वर्गहरू** भनिन्छ? १, ८, २७, ६४, १२५, ... लाई किन **घन** भनिन्छ?
३. तपाईंले याद गर्नुभएको होला कि ३६ त्रिकोणीय संख्या र वर्ग संख्या दुवै हो! अर्थात्, ३६ वटा थोप्लाहरूलाई त्रिभुज र वर्ग दुवैमा पूर्ण रूपमा मिलाउन सकिन्छ। यसलाई चित्रण गर्दै आफ्नो नोटबुकमा चित्र बनाउनुहोस्!
यसले देखाउँदछ कि एउटै संख्यालाई फरक तरिकाले प्रतिनिधित्व गर्न सकिन्छ, र सन्दर्भको आधारमा फरक भूमिका खेल्न सकिन्छ। विभिन्न तरिकामा चित्रात्मक रूपमा केही अन्य संख्याहरूलाई प्रतिनिधित्व गर्ने प्रयास गर्नुहोस्!
४. तपाईं निम्न संख्याहरूको अनुक्रमलाई के भन्नुहुन्छ?

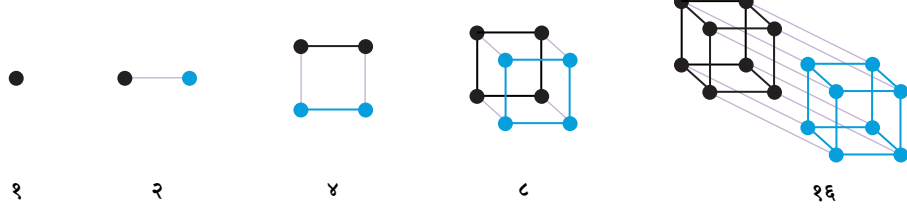
गणित
चर्चा



तिनीहरूलाई **षट्कोणीय सङ्ख्या** (hexagonal) भनिन्छ! तिनीहरूको चित्र आफ्नो नोटबुकमा बनाउनुहोस्। क्रममा आउने अर्को संख्या कुन हो?

५. के तपाईं २ का घातहरूको क्रमलाई चित्र मार्फत देखाउने तरिकाहरू सोच्न सक्नुहुन्छ? ३ का घातहरूको ?

यहाँ '२ को घात' को चित्रमय प्रस्तुतीकरणको एउटा सम्भावित तरिका दिइएको छ -



१.४ संख्या अनुक्रमहरू बीचको सम्बन्ध

कहिलेकाहीं, संख्या अनुक्रमहरू आश्चर्यजनक तरिकामा एक अर्कासँग सम्बन्धित हुन सक्छन्।

उदाहरण: जब हामी विषम संख्याहरू थप थाल्छौं तब के हुन्छ?

$$१ = १$$

$$१ + ३ = ४$$

$$१ + ३ + ५ = ९$$

$$१ + ३ + ५ + ७ = १६$$

$$१ + ३ + ५ + ७ + ९ = २५$$

$$१ + ३ + ५ + ७ + ९ + ११ = ३६$$

⋮

यो साँच्चै नै एउटा राम्रो सुन्दर ढाँचा हो !

☀ किन यस्तो हुन्छ? तपाईंलाई लाग्छ कि यो सधैं भइरहनेछ?

उत्तर यो हो कि ढाँचा सधैंभरि हुन्छ। तर किन? पहिले नै उल्लेख गरिएझैं, ढाँचा किन हुन्छ भन्ने कारण ढाँचा जत्तिकै महत्त्वपूर्ण र रोमाञ्चक छ।

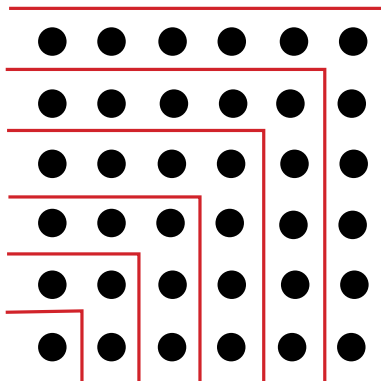
एउटा चित्रले यसलाई व्याख्या गर्न सक्छ

एउटा चित्रको प्रयोग गरेर यो तथ्यलाई बुझ्न मद्दत पुग्न सक्छ। याद गर्नुहोस् कि वर्ग संख्याहरू एउटा वर्ग ग्रीडमा बिन्दुहरूको गणना गरेर बनाइन्छ।

☀ एउटा वर्गाकार बिन्दु ग्रीडमा बिजोर संख्याहरू १, ३, ५, ७ का बिन्दुहरूलाई कसरी विभाजन गर्न सकिन्छ?

थप पढ्नु अघि यसको बारेमा एकछिन सोच्नुहोस्।

यहाँ यो कसरी गर्न सकिन्छ:



तल दिइएको ढाँचामा यो कसरी गर्न सकिन्छ भनेर देखाइएको छ।

$$१ + ३ + ५ + ७ + ९ + ११ = ३६.$$

किनकि यस प्रकारको चित्र कुनै पनि नापको वर्गको लागि बनाउन सकिन्छ, त्यसैले यो स्पष्ट हुन्छ कि बिजोर सङ्ख्याहरूलाई जोड्दा किन वर्ग सङ्ख्याहरू प्राप्त हुन्छन्।

☀ यसैगरी एउटा अर्को चित्र कोरेर के तपाईं पहिलो १० वटा विषम संख्याको योगफल के हो भन्न सक्नुहुन्छ?

☀ अब, यस्तै चित्र कल्पना गरेर वा आवश्यक अनुसार आंशिक रूपमा कोरेर, के तपाईं पहिलो १०० बिजोर सङ्ख्याहरूको योग भन्न सक्नुहुन्छ??

अनुक्रमहरू बीच यस्तो सम्बन्धको अर्को उदाहरण:

माथि र तल थप्दै

आउनुहोस्, तलको ढाँचा हेरौं:

$$१ = १$$

$$१ + २ + १ = ४$$

$$१ + २ + ३ + २ + १ = ९$$

$$१ + २ + ३ + ४ + ३ + २ + १ = १६$$

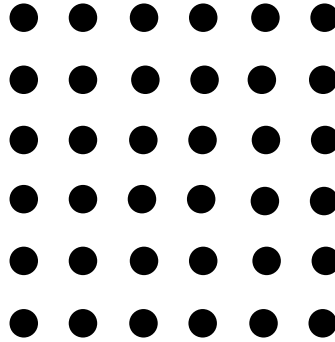
$$१ + २ + ३ + ४ + ५ + ४ + ३ + २ + १ = २५$$

$$१ + २ + ३ + ४ + ५ + ६ + ५ + ४ + ३ + २ + १ = ३६$$

⋮

दिइएको ढाँचालाई हेर्दा यो देखिन्छ कि गणना सङ्ख्याहरूलाई माथि र त्यसपछि तल जोड्नु वर्ग सङ्ख्याहरू प्राप्त गर्ने एउटा अर्को तरिका हो।

☀ के तपाईं यस्तै चित्रमय व्याख्या फेला पार्न सक्रहुन्छ ?

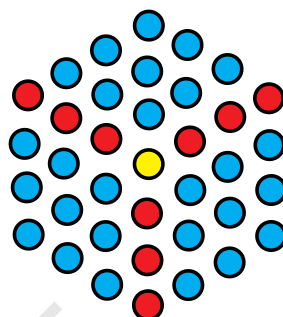
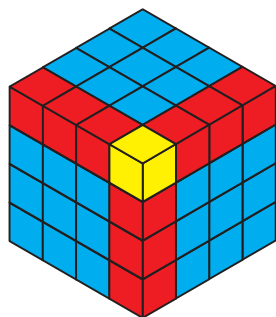


☀ आउनुहोस्, पत्ता लगाऔं

१. के तपाईं यस्तै चित्रमय व्याख्या फेला पार्न सक्रहुन्छ जसले गणना सङ्ख्याहरूलाई माथि र तल जोड्दा, अर्थात् $१, १ + २ + १, १ + २ + ३ + २ + १, \dots$, किन वर्ग सङ्ख्याहरू प्राप्त हुन्छन् भन्ने कुराको व्याख्या गर्दछ ?
२. यो तस्वीरको ठुलो संस्करणको कल्पना गरेर वा आवश्यकता अनुसार यसको आंशिक चित्र बनाएर, के तपाईं पत्ता लगाउन सक्रहुन्छ कि $१ + २ + ३ + \dots + ९९ + १०० + ९९ + \dots + ३ + २ + १$ को मान कति हुन्छ ?
३. जब तपाईं सबै '१' भएको अनुक्रमलाई माथितिर जोड्न थाल्नुहुन्छ, तब तपाईंले कुन अनुक्रम प्राप्त गर्नुहुन्छ ? जब तपाईं सबै '१' भएको अनुक्रमलाई माथि र तल जोड्नुहुन्छ, तब कुन अनुक्रम प्राप्त गर्नुहुन्छ ?
४. जब तपाईं गणना सङ्ख्याहरूलाई माथितिर जोड्न थाल्नुहुन्छ, तब तपाईंले कुन अनुक्रम प्राप्त गर्नुहुन्छ ? के तपाईं एउटा सानो चित्रको माध्यमबाट व्याख्या गर्न सक्रहुन्छ ?
५. जब तपाईं क्रमागत त्रिभुजाकार सङ्ख्याहरूको जोडीलाई जोड्नुहुन्छ तब के हुन्छ ? उदाहरणको लागि, $१ + ३, ३ + ६, ६ + १०, १० + १५, \dots$ लिनुहोस्। तपाईंले कुन अनुक्रम पाउनुहुन्छ ? किन ? के तपाईं यसलाई चित्रद्वारा स्पष्ट पार्न सक्रहुन्छ ?
६. जब तपाईं १ बाट सुरु गर्दै २ को घातहरूलाई जोड्न थाल्नुहुन्छ तब के हुन्छ ? उदाहरणको लागि, $१, १ + २, १ + २ + ४, १ + २ + ४ + ८, \dots$ लिनुहोस्। अब, यी प्रत्येक सङ्ख्यामा १ थप्नुहोस् - तपाईंले कुन सङ्ख्याहरू प्राप्त गर्नुहुन्छ ? किन यस्तो हुन्छ ?

गणित
चर्चा

७. त्रिकोणात्मक संख्याहरूलाई ६ ले गुणन गरेर १ जोड्दा के हुन्छ? तपाईं कुन अनुक्रम प्राप्त गर्नुहुन्छ? के तपाईं यसलाई चित्रको साथ व्याख्या गर्न सक्नुहुन्छ?
८. जब तपाईं षट्भुजाकार नम्बरहरू थप्न थाल्नुहुन्छ, अर्थात्, १, १ + ७, १ + ७ + १९, १ + ७ + १९ + ३७ लिनुहोस्, ... ? तपाईं कुन अनुक्रम पाउनुहुन्छ? के तपाईं यसलाई घनको चित्र प्रयोग गरेर व्याख्या गर्न सक्नुहुन्छ?












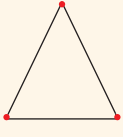
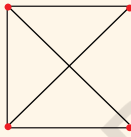
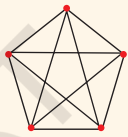





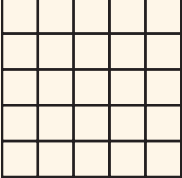



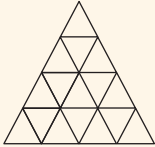
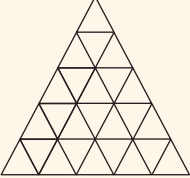

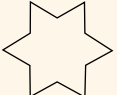
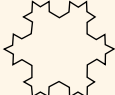
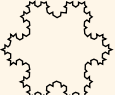
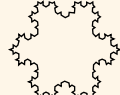
९. सारणी १ मा दिइएका अनुक्रमहरूमा र दुई भिन्न अनुक्रमहरूमा तिनीहरूका बीच आफैले अन्य ढाँचा वा सम्बन्ध खोज्नुहोस्। के एउटा चित्र वा अन्य कुनै माध्यमबाट तपाईं यो स्पष्ट गर्न सक्नुहुन्छ कि यस्तो किन हुन्छ?

१.५ आकारहरूमा ढाँचा

गणितमा देखा पर्ने अन्य महत्त्वपूर्ण र आधारभूत ढाँचाहरू आकारका ढाँचाहरू हुन्। यी आकारहरू एक, दुई वा तीन आयामहरूमा (१D, २D, वा ३D) हुनसक्छन्- वा अझ बढी आयामहरूमा पनि हुन सक्छन्। आकारहरूमा ढाँचाहरूको अध्ययन गर्ने गणितको शाखालाई ज्यामिति भनिन्छ।

आकृति अनुक्रम गणितज्ञहरूले अध्ययन गर्ने आकृति ढाँचाको एक महत्त्वपूर्ण प्रकार हो। तालिका ३ ले गणितमा अध्ययन गरिएका केही कुञ्जी आकार अनुक्रमहरू देखाउँदछ।

तालिका ३: आकार अनुक्रमका उदाहरणहरू

				नियमित बहुभुजहरू	
त्रिभुज	चतुर्भुज	पञ्चभुज	षट्भुज		
					
सप्तभुज	अष्टभुज	नवभुज	दशभुज		
					पूर्ण आलेख
K2	K3	K4	K5	K6	
					शुप्रिएका वर्ग
					शुप्रिएका त्रिभुज
					कीच हिमपात

☀ आउनुहोस्, पत्ता लगाऔं

- के तपाईं तालिका ३ मा दिइएका प्रत्येक अनुक्रममा ढाँचा चित्र सक्नुहुन्छ?
- तपाईंको नोटबुकमा सारणी ३ मा दिइएका प्रत्येक अनुक्रमलाई पुनः कोर्नुहोस्। के तपाईं प्रत्येक अनुक्रममा अर्को आकार बनाउन सक्नुहुन्छ? किन वा किन सक्नुहुन्न? प्रत्येक अनुक्रम पछि, अनुक्रममा आकारहरू बनाउने नियम वा ढाँचा के हो भनेर आफ्नै शब्दमा वर्णन गर्नुहोस्।

गणित
चर्चा

१.६ संख्या अनुक्रमहरूसँगको सम्बन्ध

प्रायः आकार अनुक्रमहरू आश्चर्यजनक तरिकामा संख्या अनुक्रमहरूसँग सम्बन्धित हुन्छन्। यस्तो सम्बन्ध आकार अनुक्रम र सम्बन्धित संख्या अनुक्रम दुवै अध्ययन र बुझ्न सहायक हुन सक्छ।

उदाहरण: नियमित बहुभुजको आकार अनुक्रमका पक्षहरूको सङ्ख्या ३, अर्थात्, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १० बाट सुरु हुने गणना संख्याद्वारा दिइन्छ। यसैले यी आकृतिहरूलाई क्रमशः भनिन्छ, नियमित त्रिकोण, चतुर्भुज (अर्थात्, वर्ग), षट्भुज षड्भुज, सप्तज, अष्टज, नवभुज, दशभुज, आदि, भनिन्छ।


'सम' शब्दले यी आकारहरूमा 'भुजाहरू'को लम्बाइ बराबर हुन्छ र साथै 'कोणहरू' पनि बराबर हुन्छन् (अर्थात् भुजाहरू बराबर देखिन्छन् र कुनाहरू पनि बराबर देखिन्छन्) भन्ने कुरालाई जनाउँछ। कोणहरूको बारेमा हामी अर्को अध्यायमा विस्तृत छलफल गर्नेछौं।

तालिका ३ का अन्य आकार अनुक्रमहरूको पनि सङ्ख्या अनुक्रमहरूसँग सम्बन्ध छ।

☀ आउनुहोस्, पत्ता लगाऔं

- सम बहुभुजहरूको प्रत्येक आकार अनुक्रममा भुजाहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्। तपाईंले कुन सङ्ख्या अनुक्रम प्राप्त गर्नुहुन्छ? सम बहुभुजहरूको प्रत्येक आकार अनुक्रममा आकृतिहरूको कुनाहरूको विषयमा तपाईं के भन्नुहुन्छ? के तपाईंले त्यही सङ्ख्या अनुक्रम प्राप्त गर्नुहुन्छ? के तपाईं प्रस्ट पार्न सक्नुहुन्छ कि किन यस्तो हुन्छ?
- पूर्ण आलेखको अनुक्रममा प्रत्येक आकारमा रेखाहरूको सङ्ख्या गणना गर्नुहोस्। तपाईंले कुन नम्बर अनुक्रम प्राप्त गर्नुहुन्छ? के तपाईं यसको कारण बताउन सक्नुहुन्छ?
- ढेर गरिएका वर्गहरूको अनुक्रमको प्रत्येक आकारमा कति साना वर्गहरू छन्? यसबाट कुन संख्या अनुक्रम प्राप्त हुन्छ? के तपाईं स्पष्ट गर्न सक्नुहुन्छ कि यस्तो किन हुन्छ?

प्रयास
गर्नुहोस्

४. ढेर गरिएका त्रिभुजहरूको अनुक्रमको प्रत्येक आकारमा कति साना त्रिभुजहरू छन्? यसबाट कुन संख्या अनुक्रम प्राप्त हुन्छ? के तपाईं स्पष्ट गर्न सक्नुहुन्छ कि यस्तो किन हुन्छ? (संकेत— अनुक्रमको प्रत्येक आकारमा, प्रत्येक पङ्क्तिमा कति त्रिभुजहरू छन्?)
५. कोच हिमपात (Koch snowflake) वाला अनुक्रममा, एक आकारबाट अर्को आकार प्राप्त गर्नको लागि प्रत्येक रेखाखण्डलाई '-' 'गणितीय उभार (speed bump)'  बाट प्रतिस्थापन गर्नुपर्छ। जति-जति यसलाई धेरै पटक गरिन्छ, त्यति-त्यति परिवर्तनहरू अत्यन्त साना-साना रेखाखण्डहरूसँग साना र अझ साना हुँदै जान्छन्। कोच हिमपातको प्रत्येक आकारमा कुल कति रेखाखण्डहरू छन्? यसको संगत संख्या अनुक्रम के हो? (३, १२, ४८,, अर्थात् ४ को घातको निरन्तर गुणा यसको उत्तर हो, यो अनुक्रम तालिकामा छैन।)

प्रयास
गर्नुहोस्

सारांश

- गणितलाई ढाँचाहरूको खोजी र ती ढाँचाहरू किन अस्तित्वमा छन् भनेर व्याख्याको लागि हेर्न सकिन्छ।
- गणितमा देखा पर्ने सबैभन्दा आधारभूत ढाँचाहरू मध्ये एक संख्या अनुक्रम हो।
- संख्या अनुक्रमका केही महत्त्वपूर्ण उदाहरणहरूमा गणना संख्या, विषम संख्या, सम संख्या, वर्ग संख्या, त्रिकोणीय संख्या, घन संख्या, विरहांक संख्या, र २ को घात समावेश छन्।
- कहिलेकाहीं संख्या अनुक्रमहरू सुन्दर र उल्लेखनीय तरिकामा एक अर्कासँग सम्बन्धित हुन सक्छ। उदाहरणका लागि, १ बाट सुरु हुने विषम संख्याहरूको अनुक्रम थप्दा वर्ग संख्या प्राप्त हुन्छ।
- चित्रहरू प्रयोग गरेर संख्या अनुक्रमहरू दृश्यात्मकताले अनुक्रमहरू र तिनीहरू बीचको सम्बन्धहरू बुझ्न मद्दत गर्न सक्छ।
- आकृति अनुक्रम गणितमा अर्को आधारभूत प्रकारको ढाँचा हो। आकार अनुक्रमका केही महत्त्वपूर्ण उदाहरणहरूमा नियमित बहुभुज, पूर्ण आलेख, ढेर गरिएका त्रिभुज र वर्ग तथा कोच हिमपात (snowflake) पुनरावृत्तिहरू समावेश हुन्छन्। आकार अनुक्रमहरूले संख्या अनुक्रमहरूसँग धेरै रोचक सम्बन्धहरू पनि प्रदर्शन गर्दछन्।