

# गणित मे प्रतिरूप



0674CH01

## 1.1 गणित की अछि ?

गणित, प्रतिरूप(पैटर्नक) खोज अछि, आ एकर स्पष्टीकरणक लेल सेहो जे ओ प्रतिरूप किएक अछि ।

एहन पैटर्न वास्तवमे हमरासभक चारूकात अछि - प्रकृतिमे, हमरासभक घर आ विद्यालयमे, सूरूज, चन्द्रमा, आ तारासभक गतिमे । ई सब किछु जे हमसभ करैत छी आ देखैत छी, किनबा आ भोजन बनाएबासँ लऽ कऽ गेन फेकबा आ खेल खेलएबा तक, मौसम केर प्रतिरूपकेँ बुझबा आ तकनीकक उपयोग धरि सभ गणिते तऽ होइ अछि ।

प्रतिरूपक खोज आ ओकर स्पष्टीकरण एकटा मजगर आ रचनात्मक प्रयास भऽ सकैत अछि । इएह कारण अछि जे गणितज्ञ गणितकेँ कला आ विज्ञान दुनूक रूपमे सोचैत छथि । एहि साल हम आशा करैत छी जे कक्षामे अहाँकेँ गणितीय प्रतिरूपक खोज करबा आ बुझबा लेल कएक गोटा रचनात्मकत आ कलात्मक अवसर भेटत ।

ई ध्यान राखब महत्वपूर्ण अछि जे गणितक उद्देश्य मात्र ई ज्ञात करब नहि अछि जे कोन प्रतिरूपक अस्तित्व अछि, अपितु ओकर अस्तित्व किएक अछि एकर स्पष्टीकरण सेहो ज्ञात करब अछि । तखन एहि तरहक स्पष्टीकरणक उपयोग प्रायः ओहि सन्दर्भसँ बहुत आगू अनुप्रयोगमे कएल जा सकैत अछि जाहिमे ओकर खोज कएल गेल छल, जे तखन मनुष्यताकेँ आगू बढ़बाक लेल प्रेरित करबामे सहायता कऽ सकैत अछि ।

उदाहरणक लेल, तारा, ग्रह आ ओकर उपग्रहक गतिमे प्रतिरूपक समझ मानवजातिकेँ गुरुत्वाकर्षणक सिद्धान्त विकसित करबाक लेल प्रेरित कएलक, जाहिसँ हमसभ अपन उपग्रह प्रक्षेपित कऽ सकैत छी आ चन्द्रमा आ मङ्गल ग्रह पर रॉकेट पठा सकैत छी; तहिना जीनोममे प्रतिरूपकेँ बुझलासँ रोगक निदान आ उपचारमे सहायता भेटैत अछि - एहन हजारो आन उदाहरणमे ई एकटा अछि।

## आउ, ज्ञात करी

1. की अहाँ आन उदाहरण सभक विषयमे सोचि सकैत छी, जतए गणित दैनिक जीवनमे हमरासभक सहयोग करैत अछि?
2. गणित मानवताकेँ आगू बढ़एबामे कोना सहयोग आ प्रेरित केलक अछि? (अहाँ एहन उदाहरण केर विषयमे विचार कऽ सकैत छी जाहिमे सम्मिलित अछि: वैज्ञानिक प्रयोग करब; हमरासभक अर्थव्यवस्था आ लोकतन्त्र चलाएब; पुल, घर वा अन्य जटिल संरचनाक निर्माण; टीवी, मोबाइल फोन, कम्प्यूटर, साइकिल, रेलगाड़ी, कार, विमान, कैलेण्डर, घड़ी, आदि बनौनाइ सम्मिलित अछि।)

गणित  
चर्चा

## 1.2 संख्यामे प्रारूप

गणितमे देखाइबला सभसँ बेसी मौलिक प्रतिरूपमे संख्याक प्रतिरूप अछि, विशेषरूपसँ पूर्ण संख्याक पैटर्न - 0, 1, 2, 3, 4, ...

गणिक केर ओ शाखा जाहिमे पूर्ण संख्याकेँ प्रतिरूपक अध्ययन कएल जाइत अछि, **संख्या सिद्धान्त** कहाइत अछि।

**संख्या अनुक्रम** (sequences) सभसँ बेसी मौलिक आ सभसँ बेसी आकर्षित करैबला प्रतिरूप केर प्रकारमे अछि, जकर अध्ययन गणितज्ञ करैत छथि।

सारणी 1 किछु प्रमुख संख्या अनुक्रम देखबैत अछि जकर अध्ययन गणितमे कएल जाइत अछि।

## सारणी 1: संख्या अनुक्रमक उदाहरण

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...	(सभटा 1)
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...	(संख्या गिनती)
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	(विषम संख्या)
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...	(सम संख्या)
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...	(त्रिकोण संख्या)
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...	(वर्ग)
1, 8, 27, 64, 125, 216, ...	(घन)
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...	(विरहाङ्क संख्या)
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...	(2 केर घात)
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ...	(3 केर घात)

### ☀ आउ, ज्ञात करी

1. की अहाँ सारणी 1 मे देल सभ अनुक्रम केर पहिचान कऽ सकैत छी?
2. सारणी 1 मे देल गेल सभ अनुक्रमकेँ ओकर अगिला तीन संख्याक सङ्ग अपन उत्तर पुस्तिका (नोटबुक) मे पुनः लिखू। सभ अनुक्रमक बाद, ओहि अनुक्रममे संख्यासभकेँ बनबएबला नियमकेँ अपना शब्दमे लिखू।

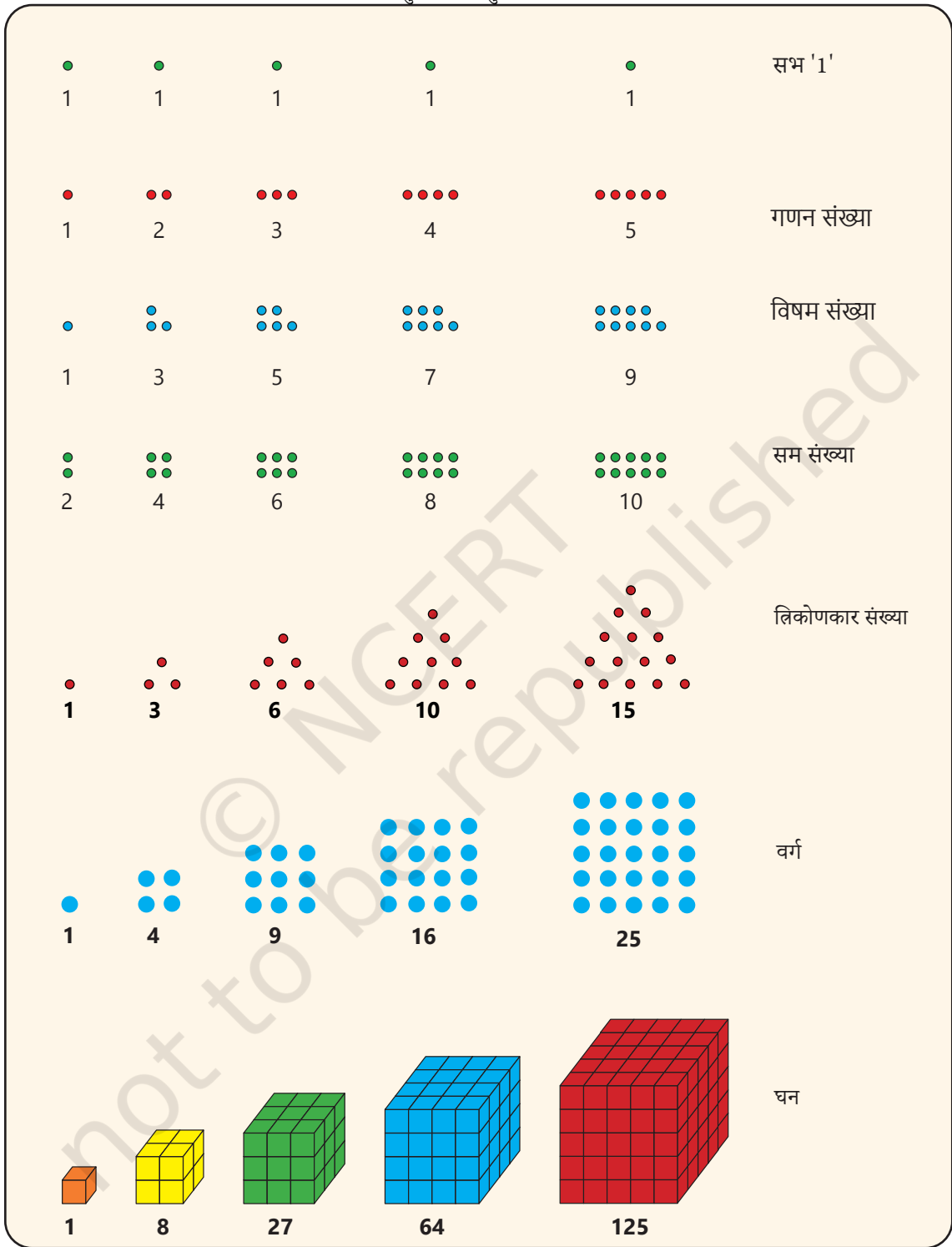
गणित  
वार्ता

### 1.3 संख्या अनुक्रमसभक दृश्याङ्कन

चित्तक उपयोगसँ बहुत रास संख्या अनुक्रमक कल्पना कएल जा सकैत अछि। चित्र वा आरेखक माध्यमसँ गणितीय वस्तुक कल्पना गणितीय प्रतिरूप आ अवधारणाकेँ बुझबाक एकटा बहुत उपयोगी तरीका भऽ सकैत अछि।

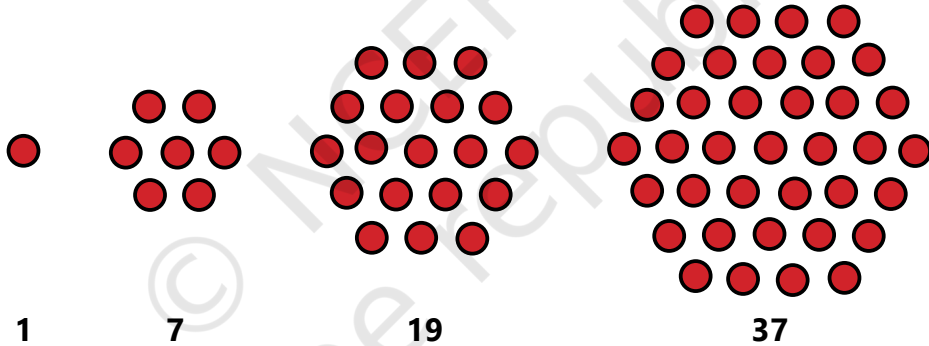
आउ, सारणी 1 केर प्रथम सात अनुक्रमकेँ अग्रलिखित चित्रक उपयोग करैत प्रदर्शित करी-

सारणी 2: किछु संख्या अनुक्रमक सचित निरूपण



## आउ, ज्ञात करी

- सारणी 2 मे देल संख्या अनुक्रमकेँ चित्रात्मक रूपसँ दर्शाएबाक लेल अपन उत्तर पुस्तिकामे प्रतिलिपि बना कऽ प्रत्येक अनुक्रमक लेल अगिला चित्र बनाबू।
- 1, 3, 6, 10, 15, ... **त्रिकोणीय संख्या** किए कहाइत अछि? 1, 4, 9, 16, 25, ... **वर्ग संख्या** वा **वर्ग** किए कहाइत अछि? 1, 8, 27, 64, 125, ... **घन संख्या** वा **घन** किए कहाइत अछि?
- अहाँ ध्यान देने हएब जे 36 एकटा त्रिकोणीय संख्या आ वर्गाकार संख्या दुनू अछि। अर्थात्, 36 बिन्दुकेँ त्रिभुज आ वर्ग दुनूमे पूर्ण रूपसँ व्यवस्थित कएल जा सकैत अछि। अपन उत्तर पुस्तिकामे एकरा स्पष्ट करैत चित्र बनाउ।  
एहिसँ पता चलैत अछि जे एकहि संख्याकेँ अलग-अलग प्रकारसँ प्रस्तुत कएल जा सकैत अछि, आ सन्दर्भक आधार पर भिन्न-भिन्न भूमिका निभाओल जा सकैत अछि। किछु आन संख्याकेँ भिन्न प्रकारसँ चित्रात्मक रूपसँ प्रस्तुत करबाक प्रयास करू।
- अहाँ संख्यासभक निम्न अनुक्रमकेँ की कहबै?

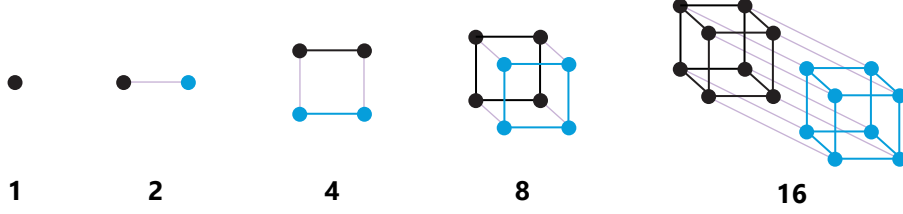


ई सही अछि, ओकरा **षट्कोणीय (hexagonal) संख्या** कहल जाइत अछि। एकरा अपन उत्तर पुस्तिकामे चित्रित करू। अनुक्रममे अगिला संख्या की हएत?

- की अहाँ '2 केर घात' आ '3 केर घात' क अनुक्रमक कल्पना आ ओकरा चित्रित करबाक व्यवस्थाक विषयमे सोचि सकैत छी?



2 केर घातक विषयमे सोचबाक एकटा सम्भावित व्यवस्था एतय अछि -



## 1.4 संख्या अनुक्रमसभक बीच सम्बन्ध

कखनो काल संख्या अनुक्रम चमत्कारिक रूपसँ एक-दोसरसँ सम्बन्धित भऽ सकैत अछि।

**उदाहरण:** की होइ अछि जखन हमसभ विषम संख्याकेँ जोड़ब प्रारम्भ करैत छी?

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

⋮

ई वास्तवमे एकटा सुन्नर प्रतिरूप अछि!

☀ एहन किए होइत अछि? की अहाँकेँ लगैत अछि जे सतत एहिना होइत रहतै?

एकर उत्तर ई अछि जे प्रतिरूप सदा केर लेल होइत अछि। मुदा किएक? जेना कि पहिने उल्लेख कएल गेल अछि, प्रतिरूप हएबाक कारण ओतबे महत्वपूर्ण आ रोमाञ्चक अछि जेना कि प्रतिरूप स्वयम्।

**एकटा चित्र एकर व्याख्या कऽ सकैत अछि**

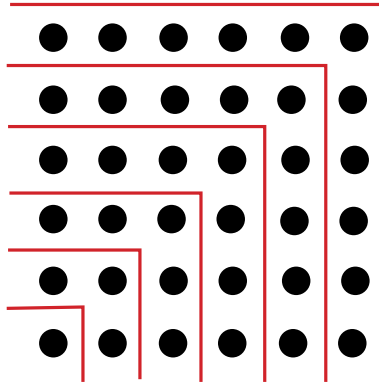
एकटा चित्रसँ एहि तथ्यकेँ बुझबामे सहयोग भेटि सकैत अछि। स्मरण करू कि वर्ग संख्या एकटा वर्ग ग्रिड (grid) मे बिन्दुसभक गिनती कए कऽ बनाओल जाइत अछि।

☀ एकटा वर्गाकार बिन्दु ग्रिडमे विषम संख्यासभ- 1, 3, 5, 7 केँ बिन्दुसभकेँ कोना बाँटल जा सकैत अछि?

आगा पढ़बासँ पहिने एकरा विषयमे एक क्षण लेल सोचू!

गणित  
चर्चा

एतए निच्चाँ ई देखाओल गेल अछि जे ई कोना कएल जा सकैत अछि -



ई चित्र ई स्पष्ट करैत अछि जे

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

चूँकि एहन चित्र कोनो आकार केर वर्गक लेल बनाओल जा सकैत अछि, एहिसँ पता चलैत अछि जे विषम संख्याकेँ जोड़लासँ वर्ग संख्या किएक भेटैत अछि।

☀ एहिना एक अन्य चित्र बना क की अहाँ बता सकैत छी जे की प्रथम 10 विषम संख्यासभक योग की अछि?

☀ आब एकटा एहने चित्रक कल्पना करू वा आवश्यकतानुसार आंशिक चित्र बना क की अहाँ बता सकैत छी जे प्रथम 100 विषम संख्यासभक योग की अछि? एहन चित्रक कल्पना करू आ आवश्यकतानुसार छोट आकारमे बना क एकरा बुझाउ।

**अनुक्रमसभक मध्य एहन सम्बन्धक एकटा आओर उदाहरण:**

**उप्पर आओर निच्चाँ जोड़ब**

आउ, निम्नलिखित प्रतिरूपकेँ ध्यानसँ देखी -

$$1 = 1$$

$$1 + 2 + 1 = 4$$

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$$

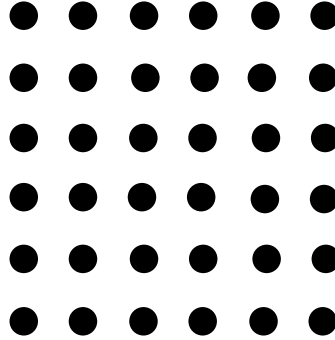
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

⋮

देल गेल एहन प्रतिरूपकेँ देखि क लगैत अछि जे ई वर्ग संख्याकेँ प्राप्त करबाक एकटा आओर तरीका दऽ रहल अछि - गिनती संख्याकेँ ऊपर आ फेर निच्चाँ जोड़ि क!

☀ की अहाँ निच्चाँ देल गेल ग्रिड बिन्दुसँ एकटा एहने चित्रात्मक स्पष्टीकरण ज्ञात कऽ सकैत छी ?

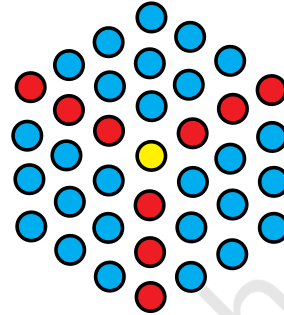
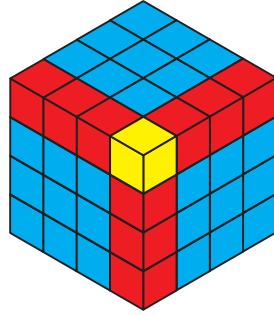


☀ आउ, ज्ञात करी

1. गणन संख्याकेँ ऊपर आ निच्चाँ जोड़ला पर अर्थात्  $1, 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 3 + 2 + 1, \dots$ , सँ वर्ग संख्यासभ किएक प्राप्त होइ अछि ? की अहाँकेँ एहने सचित्र व्याख्या दऽ सकैत छी ?
2. एहि चित्रक एकटा पैघ संस्करण केर कल्पना कऽ क अथवा आवश्यकतानुसार एकरा आंशिक रूपसँ खींचि कऽ की अहाँ देख सकैत छी जे  $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1$  केर मान की हएत ?
3. जखन अहाँ सबटा 1 केर अनुक्रमकेँ जोड़ब शुरू करैत छी तखन अहाँकेँ कोन क्रम भेटैत अछि ? जखन अहाँ सबटा 1 केर अनुक्रमकेँ ऊपर-निच्चाँ जोड़ैत छी तखन अहाँकेँ कोन क्रम भेटैत अछि ?
4. जखन अहाँ गणन संख्याकेँ ऊपर दिस जोड़ब शुरू करैत छी तखन अहाँकेँ कोन अनुक्रम भेटैत अछि ? की अहाँ एकटा छोटसन सचित्र स्पष्टीकरण दऽ सकैत छी ?
5. जखन अहाँ क्रमागत त्रिकोणीय संख्याक जोड़ा जोड़ैत छी तखन की होइत अछि ? अर्थात्,  $1 + 3, 3 + 6, 6 + 10, 10 + 15, \dots$  अहाँकेँ कोन क्रम भेटैत अछि ? किए ? की अहाँ एकरा चित्रक सङ्ग बुझा सकैत छी ?
6. की होइत अछि जखन अहाँ 1 सँ प्रारम्भ करैत 2 केर घात सभकेँ जोड़ब शुरू करैत छी ? अर्थात्  $1, 1 + 2, 1 + 2 + 4, 1 + 2 + 4 + 8, \dots$  ? आब एहि सभमे सँ सभ संख्यामे 1 जोड़ू — अहाँकेँ कोन संख्या भेटत ? ई किएक होइ अछि ?

प्रयास करू

7. जखन अहाँ त्रिकोणीय संख्याकेँ 6 सँ गुणा करैत छी आ 1 जोड़ैत छी तखन की होइत अछि? अहाँके कोन क्रम भेटैत अछि? की अहाँ एकरा चितक माध्यमसँ बुझा सकैत छी?
8. जखन अहाँ षट्कोणीय संख्या जोड़ब शुरू करैत छी तखन की होइत अछि? अर्थात,  $1, 1 + 7, 1 + 7 + 19, 1 + 7 + 19 + 37, \dots$ ? अहाँके कोन क्रम भेटैत अछि? की अहाँ एकरा घन केर चितक प्रयोगसँ बुझा सकैत छी?











9. सारणी 1 मे देल गेल अनुक्रमसभमे आ ओकर मध्य अपन प्रतिरूप वा सम्बन्ध ताकू। की अहाँ चित्र वा कोलो आन माध्यमसँ बता सकैत छी जे ई एहि तरहे किएक होइत अछि?

### 1.5 आकारमे प्रतिरूप


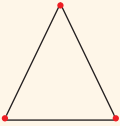
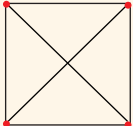
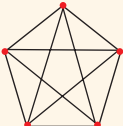
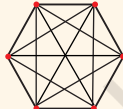
गणितमे पाओल जाइबला आन महत्वपूर्ण आ बुनियादी प्रतिरूप आकारक प्रतिरूप अछि। ई आकारसभ एक, दू, वा त्री आयाम (1D, 2D, वा 3D) मे अथवा एतए धरि जे इहो भऽ सकैत अछि जे आओर बेसीओ आयाम (dimension) मे भऽ सकैत अछि। गणितक ओ शाखा जाहिमे आकारक प्रतिरूप केर अध्ययन कएल जाइत अछि, ओकरा ज्यामिति कहल जाइत अछि।

**आकार अनुक्रम** एकटा महत्वपूर्ण प्रकारक आकार प्रतिरूप अछि जकर गणितज्ञ सभ अध्ययन करैत छथि। सारणी 3 किछु प्रमुख आकारक अनुक्रम देखबैत अछि जकर अध्ययन गणितमे कएल जाइत अछि।





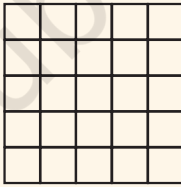
सारणी 3: आकार अनुक्रमक उदाहरण

			
त्रिभुज	चतुर्भुज	पञ्चभुज	षड्भुज
			
सप्तभुज	अष्टभुज	नवभुज	दशभुज




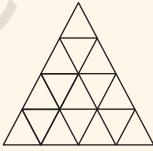
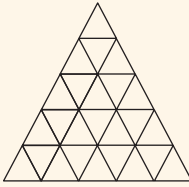
सम बहुभुज

				
K2	K3	K4	K5	K6



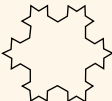
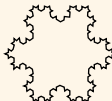
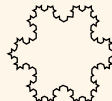
सम्पूर्ण आलेख

				
---	---	---	---	---

ढेरित वर्ग

				
---	---	---	---	--

ढेरित त्रिभुज

				
---	---	---	---	---

कोच हिमकण

## ☀ आउ, ज्ञात करी

1. की अहाँ सारणी 3 केर सभ अनुक्रममे प्रतिरूप केर पहिचान कऽ सकैत छी ?
2. प्रयास करू आ अपन पुस्तिकामे सारिणी 3 केर सभ अनुक्रमकेँ फेरसँ बनाउ। की अहाँ सभ अनुक्रममे अगिला आकारकेँ बना सकैत छी? किएक वा किएक नहि? सभटा अनुक्रमक बाद अपन शब्दमे ओहि नियम वा प्रतिरूप केर व्याख्या करू, जकरा अनुसार अनुक्रममे आकार बनि रहल अछि।

गणित  
चर्चा

## 1.6 संख्या अनुक्रमसभसँ सम्बन्ध

बहुधा आकारक अनुक्रम आश्चर्यजनक रूपसँ संख्या अनुक्रमसँ सम्बन्धित होइत अछि। एहन सम्बन्ध आकार अनुक्रम आ सम्बन्धित संख्या अनुक्रम दुनूक अध्ययन आ समझबामे सहायक भऽ सकैत अछि।

**उदाहरण:** सम बहुभुज (regular polygons) सभक आकार अनुक्रममे भुजासभक संख्या 3 सँ प्रारम्भ होइबला गिनती अर्थात् 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, .... द्वारा कएल जाइत अछि। एही लेल एहि आकारसभकेँ क्रमशः **सम त्रिकोण**, **चतुर्भुज** (अर्थात् **वर्ग**), **पञ्चभुज**, **षट्भुज**, **सप्तभुज**, **अष्टभुज**, **नवभुज**, **दशभुज** आदि कहल जाइत अछि।

'सम' शब्द एहि तथ्यकेँ सन्दर्भित करैत अछि जे एहि आकारक 'भुजा' समान होइत अछि आ 'कोण' सेहो एक समान होइत अछि (अर्थात्, भुजा समान देखाइत अछि आ कोना सेहो समान देखाइत अछि)। हम अगिला अध्यायमे कोण पर बेसी विस्तारसँ चर्चा करब।

सारणी 3 केर अन्य आकार अनुक्रममे सेहो संख्या अनुक्रमक सङ्ग सुन्नर सम्बन्ध अछि।

## ☀ आउ, ज्ञात करी

1. सम बहुभुज केर सभ भुजाक आकार अनुक्रममे भुजासभक संख्या ज्ञात करू। अहाँक कोन संख्या अनुक्रम प्राप्त करैत अछि? सम बहुभुजकेँ सभ आकार अनुक्रममे आकृतिसभकेँ कोन केँ विषयमे अहाँ की कहबै? की अहाँकेँ एह संख्या अनुक्रम प्राप्त होइ अछि? की अहाँ स्पष्ट कऽ सकैत छी जे एना किएक होइ अछि?
2. सम्पूर्ण आलेख केर सभ आकार अनुक्रममे रेखा सभक संख्याक गणना करू। एहिसँ अहाँकेँ कोन संख्या अनुक्रम प्राप्त होइ अछि? की अहाँ बता सकैत छी जे एना किएक होइ अछि?

गणित  
चर्चा

3. ढेरित (stacked) वर्गसभक अनुक्रमक सभ आकारमे कतेक छोट-छोट वर्ग अछि? एहिमे कओन संख्या अनुक्रम प्राप्त करैत अछि? की अहाँ बता सकैत छी जे एना किएक होइ अछि?
4. ढेरित (stacked) त्रिभुज सभकेँ अनुक्रमक सभ आकारमे कतेक छोट त्रिभुज अछि? एहिसँ कोन संख्या अनुक्रम प्राप्त होइ अछि? की अहाँ स्पष्ट कऽ सकैत छी जे एहन किए होइ अछि? (सङ्केत-अनुक्रमक सभ आकारमे, सभ पङ्क्तिमे कतेक त्रिभुज अछि?)
5. कोच हिमकण (Koch snowflake) बला अनुक्रममे, एक आकारसँ अगिला आकार प्राप्त करबाक लेल सभ रेखाखण्ड '—' केँ एकटा 'गति उभार (speed bump)'  $_ \wedge _$  सँ परिवर्तित करए पड़ैत अछि। जेना-जेना एकरा बेसी सँ बेसी बेर कएल जाइत अछि, ओना-ओना परिवर्तन बेसी छोट-छोट रेखा-खण्डक सङ्ग छोट आ आओर बेसी छोट होइत जाइत अछि। कोच हिमकण केर सभ आकारमे कुल कतेक रेखाखण्ड अछि? इनका सङ्गत संख्या अनुक्रम की अछि? (एकर उत्तर अछि 3, 12, 48, ....., अर्थात् 4 केर घातक 3 गुणा; ई अनुक्रम सारणीमे नहि अछि।)

गणित  
चर्चा

## सारांश

- गणितक पैटर्न केर खोज आ ओही पैटर्न केर अस्तित्व केर स्पष्टीकरण केर रूपमे देखल जा सकैत अछि।
- गणितमे होबएबला सबसँ मौलिक पैटर्नमे **संख्या अनुक्रम** अछि।
- संख्या अनुक्रम सभक किछु महत्वपूर्ण उदाहरणमे गणन संख्या, विषम संख्या, सम संख्या, वर्ग संख्या, त्रिकोणीय संख्या, घन संख्या, विरहङ्का संख्या, आ 2 केर घात सभ सम्मिलित अछि।
- कखनो काल संख्या अनुक्रम एक दोसरसँ सुन्दर आ उल्लेखनीय प्रकारसँ सम्बन्धित भऽ सकैत अछि। उदाहरणक लेल, 1 सँ शुरू होबएबला विषम संख्याक अनुक्रमकेँ जोड़लासँ वर्ग संख्या भेटैत छैक।
- चित्रक उपयोग करैत संख्या अनुक्रमक कल्पना करब अनुक्रम आ ओकर बीचक सम्बन्धकेँ बुझबामे सहायता कऽ सकैत अछि।
- आकार अनुक्रम गणितमे एकटा आओर मूल प्रकारक पैटर्न अछि। आकार अनुक्रमक किछु महत्वपूर्ण उदाहरणमे नियमित बहुभुज, पूर्ण आलेख, ढेरित त्रिकोण आ वर्ग, आ कोच हिमकण (snowflake) पुनरावृत्ति सभ सम्मिलित होइ अछि। आकार अनुक्रम, संख्या अनुक्रमक सङ्ग बहुत रास रोचक सम्बन्ध सेहो प्रदर्शित करैत अछि।