

# गणितातील नमुने गणित



0674CH01

## 1.1 गणित म्हणजे काय ?

गणित म्हणजे नमुने शोधणे आणि ते नमुने का आहेत याचे कारण समजून घेणे.

अशा प्रकारचे नमुने आपल्या आजूबाजूला सर्वत्र दिसतात – निसर्गामध्ये, आपल्या घरामध्ये, शाळेमध्ये, तसेच सूर्य, चंद्र आणि ताऱ्यांच्या हालचालींमध्ये. आपण रोज करतो त्या प्रत्येक गोष्टीत हे नमुने असतात – खरेदी करताना, स्वयंपाक करताना, चेंडू फेकताना, खेळ खेळताना, हवामान समजून घेताना आणि तंत्रज्ञानाचा वापर करताना.

नमुने शोधणे आणि त्याचे कारण शोधणे ही एक मजेशीर आणि सर्जनशील गोष्ट असते. म्हणूनच गणिताला एक कला आणि विज्ञान असे दोन्ही मानले जाते. यावर्षी तुम्हाला गणित शिकताना त्यामध्ये असलेली सर्जनशीलता आणि मजा अनुभवायला मिळेल अशी अपेक्षा आहे.

हे लक्षात ठेवा की गणित फक्त नमुने शोधत नाही तर ते नमुने का आहेत हे समजावून सांगते. या कारणांचा उपयोग इतर गोष्टींसाठीही केला जाऊ शकतो आणि त्यामुळे मानवाला पुढे जाण्यास मदत होऊ शकते.

उदाहरणार्थ, ताऱ्यांच्या, ग्रहांच्या आणि त्यांच्या उपग्रहांच्या हालचालीतील नमुने समजल्यामुळे मानवजातीने गुरुत्वाकर्षणाचा सिद्धांत विकसित केला. यामुळे आपले उपग्रह अवकाशात पाठवणे आणि चंद्रावर तसेच मंगळावर रॉकेट पाठवणे शक्य झाले. त्याचप्रमाणे, जीनोममधील नमुने समजून घेतल्यामुळे आजार ओळखणे आणि त्यावर उपचार करणे शक्य झाले आहे – अशी हजारो उदाहरणे आहेत.

## हे शोधून काढा

1. तुम्हाला अजून कोणती उदाहरणे सुचतात जिथे गणित आपल्याला आपल्या रोजच्या जीवनात मदत करते?
2. गणितामुळे मानवजातीला पुढे जाण्यास कशी मदत झाली आहे? (तुम्ही खालील गोष्टींबाबत विचार करू शकता: वैज्ञानिक प्रयोग करणे; आपली अर्थव्यवस्था आणि लोकशाही चालवणे; पूल, घरे किंवा इतर जटिल संरचना बांधणे; टीव्ही, मोबाइल फोन, संगणक, सायकली, गाड्या, रेल्वे, विमाने तयार करणे; कॅलेंडर, घड्याळे तयार करणे, इत्यादी.)

गणित  
बोलणे

## 1.2 संख्येतील नमुने

गणितात आढळणारे सर्वात मूलभूत नमुने म्हणजे संख्या नमुने, विशेषतः पूर्णांकांचे नमुने:  
0, 1, 2, 3, 4, ...

पूर्णांकांमधील नमुने अभ्यास करणाऱ्या गणिताच्या शाखेला सांख्यिकी सिद्धांत (Number Theory) म्हणतात.

संख्यांच्या श्रेणी हे गणितज्ञ अभ्यास करत असलेले सर्वात मूलभूत आणि रंजक प्रकारचे नमुने आहेत. खालील तक्त्यात (तक्ता 1) गणितात अभ्यासल्या जाणाऱ्या काही महत्त्वाच्या संख्या श्रेणी दाखवलेल्या आहेत.

## तक्ता 1: संख्या अनुक्रमांची उदाहरणे

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...	(सर्व 1)
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...	(मोजण्याच्या संख्या)
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	(विषम संख्या)
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...	(सम संख्या)
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...	(त्रिकोणी संख्या)
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...	(वर्ग संख्या)
1, 8, 27, 64, 125, 216, ...	(घन संख्या)
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...	(विरहांक संख्या)
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...	(2 ची घातांक संख्या)
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ...	(3 ची घातांक संख्या)

### ☀ हे शोधून काढा

1. तुम्ही तक्ता 1 मधील प्रत्येक संख्याश्रेणीतील नमुना ओळखू शकता का?
2. तक्ता 1 मधील प्रत्येक श्रेणी तुमच्या वहीत पुन्हा लिहा आणि प्रत्येक श्रेणीतील पुढील तीन संख्या लिहा! प्रत्येक श्रेणीच्या खाली, त्या श्रेणीतील संख्या तयार करण्याचा नियम तुमच्या स्वतःच्या शब्दांत लिहा.

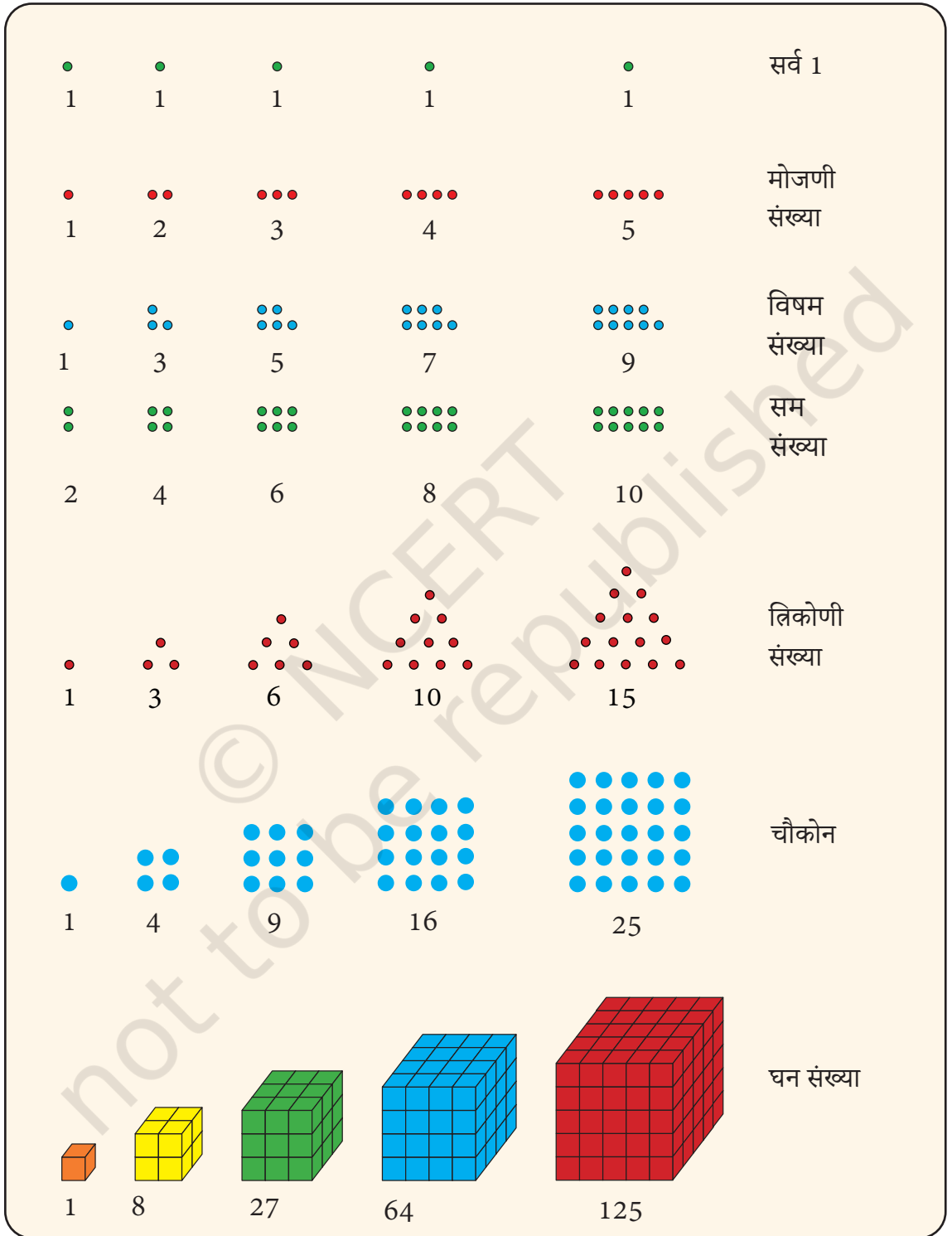
गणित  
बोलणे

### 1.3 संख्याश्रेणीचे दृश्यात्मक रूप

अनेक संख्या श्रेणी चित्रांचा उपयोग करून दृश्यात्मक रूपात दर्शवता येतात. गणिती वस्तू चित्रे किंवा रेखाचित्रांद्वारे दृश्यात्मक रूपात दर्शवणे हे गणिती नमुने आणि संकल्पना समजून घेण्यासाठी खूप उपयुक्त ठरू शकते.

चला, तक्ता 1 मधील पहिल्या सात श्रेणीचे दृश्यात्मक रूप पुढील चित्रांच्या साहाय्याने दर्शवूया.

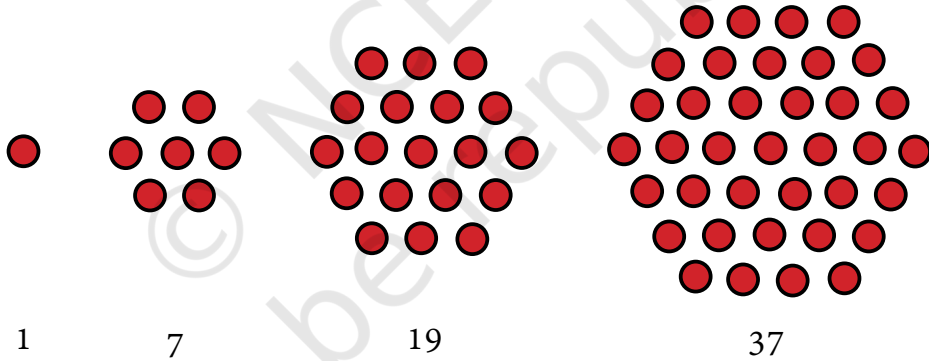
तक्ता २: काही संख्याक्रमांचे सचित्र सादरीकरण



## हे शोधून काढा

- तक्ता 2 मधील संख्याश्रेणींची चित्रात्मक रूपे तुमच्या वहीत कॉपी करा आणि प्रत्येक श्रेणीसाठी पुढील चित्र तयार करा!
- 1, 3, 6, 10, 15, ... ला त्रिकोणी संख्या का म्हणतात? 1, 4, 9, 16, 25, ... ला वर्ग संख्या किंवा वर्ग का म्हणतात? 1, 8, 27, 64, 125, ... ला घन संख्या का म्हणतात?
- तुम्ही नक्कीच लक्षात घेतले असेल की 36 हे एकत्र त्रिकोणी संख्या आणि वर्ग संख्या दोन्ही आहे! म्हणजेच, 36 बिंदूंना त्रिकोणात आणि वर्गात दोन्ही प्रकारे योग्य रितीने रचता येते. हे तुमच्या वहीत चित्र करून दाखवा!  
हे दाखवते की एकाच संख्येला वेगवेगळ्या पद्धतींनी दाखवता येऊ शकते आणि त्याच्या संदर्भावरून ती वेगवेगळ्या प्रकारे भूमिका पार करू शकते. काही इतर संख्यांना वेगवेगळ्या पद्धतीने चित्रित करून दाखवा!
- तुम्ही खालील संख्याश्रेणीला काय म्हणाल?

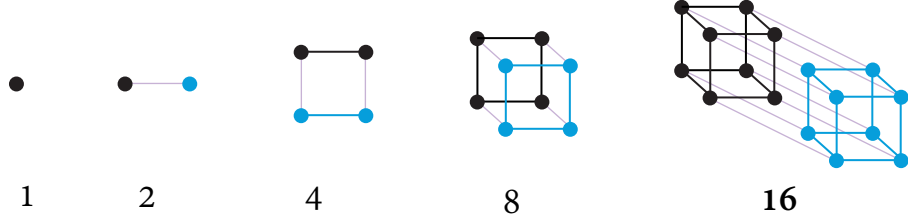
गणित  
बोलणे



तुम्ही अगदी बरोबर म्हणता, त्या संख्यांना हेक्सागोनल संख्या (Hexagonal Numbers) म्हणतात! तुमच्या वहीत या संख्या रेखा आणि त्या नंतरची संख्या काय असेल ते दाखवा.

- तुम्हाला 2 च्या घातांक (Powers of 2) आणि 3 च्या घातांक (Powers of 3) संख्यांचा चित्रात्मक दृष्टिकोन तयार करण्याचे काही उपाय सुचतात का?

2 च्या घातांक (Powers of 2) विचार करण्याचा एक संभाव्य मार्ग असा आहे:



## 1.4 संख्याश्रेणीतील परस्पर संबंध

कधी कधी, संख्याश्रेण्या एकमेकांशी आश्चर्यकारक पद्धतीने जोडल्या जातात.

**उदाहरण:** जेव्हा आपण विषम संख्यांची बेरीज करू लागतो, तेव्हा काय घडते?

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

⋮

हे खूप सुंदर नमुना आहे!

☀ हे का घडते? तुम्हाला असं वाटतं का की हे सदैव घडत राहील?

उत्तर आहे, हो, हा नमुना सदैव घडतो. पण का? आधी म्हटल्याप्रमाणे पॅटर्न का होतो याचे कारण पॅटर्नइतकेच महत्त्वाचे आणि रोमांचक आहे.

**एक चित्र ते समजावून सांगू शकते**

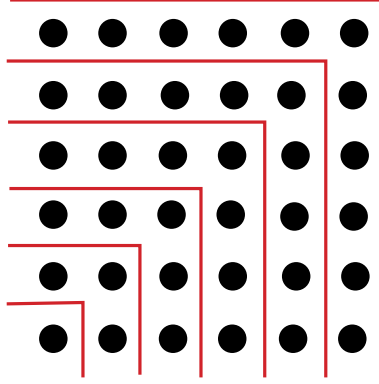
चित्रासह दृश्यीकरण केल्याने घटना स्पष्ट होण्यास मदत होते. लक्षात ठेवा की चौरस ग्रीडमधील बिंदूंची संख्या मोजून चौरस संख्या बनविली जाते.

☀ चौकोनी ग्रीडमधील बिंदूंना विषम संख्यांमध्ये विभागता येईल: 1, 3, 5, 7, ...?

पुढे वाचण्यापूर्वी क्षणभर विचार करा!

गणित  
बोलणे

हे कसे केले जाऊ शकते ते येथे आहे:



या चित्रावरून आता स्पष्ट झाले आहे की,

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.$$

कारण असे चित्र कोणत्याही आकाराच्या चौकोनासाठी बनवता येते, त्यामुळे विषम संख्या जोडल्यास चौरस संख्या का मिळते हे स्पष्ट होते.

☀ असेच चित्र रेखाटून आपण पहिल्या 10 विषम संख्यांची बेरीज किती आहे हे सांगू शकाल का ?

☀ आता अशाच चित्राची कल्पना करून, किंवा गरजेनुसार अर्धवट रेखाटून, पहिल्या 100 विषम संख्यांची बेरीज किती आहे, हे सांगता येईल का ?

**संख्याश्रेणींमधील अशा प्रकारच्या संबंधाचा एक आणखी उदाहरण:**

**वर-खाली जोडणे**

आपण खालील पॅटर्न पाहूया:

$$1 = 1$$

$$1 + 2 + 1 = 4$$

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$$

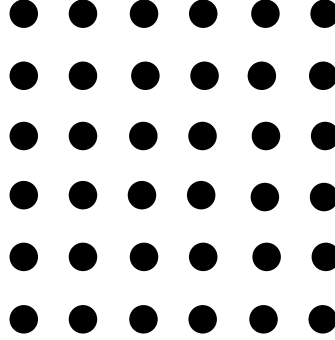
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

⋮

यावरून वर्ग संख्या मिळविण्याचा आणखी एक मार्ग दिसतो आहे- मोजणीचे आकडे वर-खाली जोडून !

☀ असेच सचित स्पष्टीकरण सापडेल का?

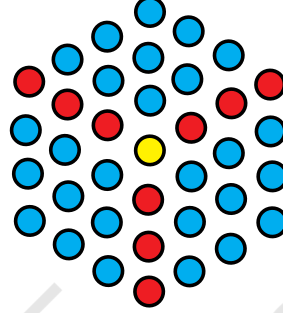
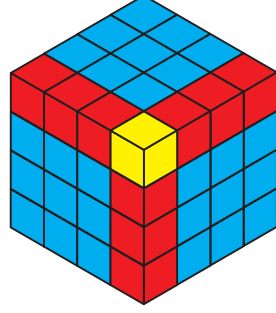


☀ हे शोधून काढा

1. तुम्ही एक समान चित्रात्मक स्पष्टीकरण शोधू शकता का की, मोजण्याच्या संख्यांना वर आणि खाली जोडल्यास, म्हणजेच,  $1, 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 3 + 2 + 1, \dots$ , वर्ग संख्यांना का मिळवते?
2. तुमचे चित्र मोठ्या प्रमाणात कल्पना करून किंवा आवश्यकतेनुसार ते अर्धवट रेखाटून, तुम्ही पाहू शकता का की  $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1$  चे मूल्य काय असेल?
3. तुम्हाला कोणती संख्या श्रेणी मिळते जेव्हा तुम्ही "सर्व 1" असलेल्या श्रेणीला जोडायला सुरवात करता? "सर्व 1" असलेल्या श्रेणीला वर आणि खाली जोडल्यास कोणती संख्या श्रेणी मिळते?
4. तुम्हाला कोणती संख्या श्रेणी मिळते जेव्हा तुम्ही मोजण्याच्या संख्यांना वर जोडायला सुरवात करता? तुम्ही एक छोटे चित्रात्मक स्पष्टीकरण देऊ शकता का?
5. जेव्हा तुम्ही लागोपाठ येणाऱ्या त्रिकोणी संख्यांची बेरीज सुरू करता, म्हणजेच,  $1 + 3, 3 + 6, 6 + 10, 10 + 15, \dots$ , तेव्हा काय घडते? तुम्हाला कोणती संख्या श्रेणी मिळते? का? तुम्ही याचे चित्राने स्पष्टीकरण देऊ शकता का?
6. जेव्हा तुम्ही 2 च्या घातांकांची बेरीज 1 पासून सुरू करता, म्हणजेच  $1, 1 + 2, 1 + 2 + 4, 1 + 2 + 4 + 8, \dots$ , तेव्हा काय घडते? आता प्रत्येक संख्येला 1 जोडा — तुम्हाला कोणत्या संख्याही मिळतात? का हे घडते?



7. जेव्हा तुम्ही त्रिकोणी संख्यांना 6 ने गुणाकार करता आणि 1 जोडता, तेव्हा काय घडते? तुम्हाला कोणती संख्या श्रेणी मिळते? तुम्ही याचे चित्राने स्पष्टीकरण देऊ शकता का?
8. जेव्हा तुम्ही हेक्सागोनल संख्यांची बेरीज सुरू करता, म्हणजेच,  $1, 1 + 7, 1 + 7 + 19, 1 + 7 + 19 + 37, \dots$ , तेव्हा काय घडते? तुम्हाला कोणती संख्या श्रेणी मिळते? तुम्ही याचे क्यूबाच्या चित्राद्वारे स्पष्टीकरण देऊ शकता का?












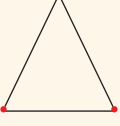
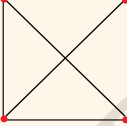
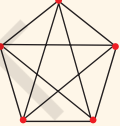



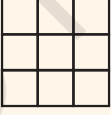

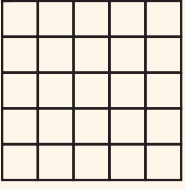



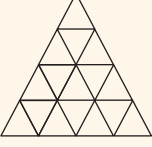
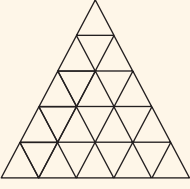

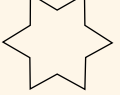
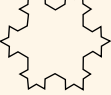


9. तक्ता 1 मधील संख्याश्रेणींमध्ये आणि त्यामध्ये स्वतःचे नमुने किंवा संबंध शोधा. तुम्ही ते का घडतात हे चित्राद्वारे किंवा इतर कोणत्याही पद्धतीने समजावून सांगू शकता का?

## 1.5 आकारातील नमुने

गणितात आढळणारे इतर महत्त्वाचे आणि मूलभूत नमुने म्हणजे आकारांचे नमुने. हे आकार एक, दोन, किंवा तीन परिमाणांत (1D, 2D, किंवा 3D) असू शकतात — किंवा त्यापेक्षा जास्त परिमाणांमध्ये देखील. गणिताच्या त्या शाखेला जी आकारांच्या नमुन्यांचा अभ्यास करते, त्याला गणितीय रेखा (Geometry) म्हणतात.

आकारांची श्रेणी हे आकाराच्या नमुन्यांमधील एक महत्त्वाचा प्रकार आहे, ज्याचा गणितज्ञ अभ्यास करतात तक्ता 3 मध्ये गणितात अभ्यासल्या जाणाऱ्या काही महत्त्वाच्या आकारांच्या श्रेण्या दाखवल्या आहेत.

### तक्ता 3: आकार अनुक्रमांची उदाहरणे

				नियमित बहुभुज	
त्रिकोण	चतुर्भुज	पंचकोन	षटकोन		
					
सप्तकोन	अष्टकोन	नवकोन	दशकोन		
					पूर्ण आलेख
$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	
					स्टॅक केलेले चौकोन
					स्टॅक केलेले त्रिकोण
					कोच स्फोप्लेक

## ☀ हे शोधून काढा

1. तुम्ही तक्ता 3 मधील प्रत्येक आकाराच्या श्रेणीतला नमुना ओळखू शकता का??
2. तक्ता 3 मधील प्रत्येक आकाराची श्रेणी तुमच्या वहीत पुन्हा रेखाटण्याचा प्रयत्न करा. तुम्ही प्रत्येक श्रेणीतील पुढील आकार रेखाटू शकता का? का किंवा का नाही? प्रत्येक श्रेणीच्या खाली, त्या आकारांची श्रेणी तयार करण्याचा नियम किंवा नमुना तुमच्या स्वतःच्या शब्दात लिहा.

गणित  
बोलणे

## 1.6 संख्या अनुक्रमांशी संबंध

साधारणपणे, आकारांच्या श्रेणींना संख्या श्रेणींशी आश्चर्यकारक पद्धतीने संबंधित केले जाते. अशा संबंधांचा अभ्यास आणि समज घेण्यामध्ये आकारांच्या श्रेणीचा आणि संबंधित संख्या श्रेणीचा उपयोग होऊ शकतो.

**उदाहरण:** साधारण बहुभुजांच्या आकारांच्या श्रेणीत बड्या बाजूंची संख्या ही मोजण्याच्या संख्यांनी दिली जाते जी 3 पासून सुरु होतात, म्हणजेच 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, .... यामुळेच या आकारांना अनुक्रमे साधारण त्रिकोण, चौकोण (याच उदाहरण म्हणजे चौकोन किंवा स्क्वेअर), पेंटागोन, हेक्सागोन, हेप्टागोन, ऑक्टागोन, नॉनागोन, डेकागोन इत्यादी म्हणतात.

‘साधारण’ हा शब्द याचा सूचक आहे की या आकारांच्या सर्व बाजू समान लांबीच्या असतात आणि त्याचप्रमाणे ‘कोन’ देखील समान असतात (अर्थात, बाजू एकसारख्या दिसतात आणि कोपरेही एकसारखे दिसतात). आपल्याला पुढील अध्यायात कोनांबद्दल अधिक सखोल माहिती मिळेल.

तक्ता 3 मधील इतर आकारांच्या श्रेणींना देखील संख्या श्रेणींशी सुंदर संबंध आहेत.

## ☀ हे शोधून काढा

1. प्रत्येक आकाराच्या बाजूंची संख्या साधारण बहुभुजांच्या आकारांच्या श्रेणीत मोजा. तुम्हाला कोणती संख्या श्रेणी मिळते? प्रत्येक आकारामधील कोपऱ्यांची संख्या मोजा. तुम्हाला तीच संख्या श्रेणी मिळते का? याचे कारण काय आहे हे समजावून सांगू शकता का?
2. प्रत्येक आकाराच्या रेषांची संख्या पूर्ण आलेखांच्या आकारांच्या श्रेणीत मोजा. तुम्हाला कोणती संख्या श्रेणी मिळते? त्याचे कारण समजावून सांगू शकता का?

प्रयत्न करून  
पहा हा

3. स्टॅक केलेल्या चौकोनांच्या श्रेणीत प्रत्येक आकारात किती छोटे चौकोने आहेत? तुम्हाला कोणती संख्या श्रेणी मिळते? हे का घडते याचे समजावून सांगू शकता का?
4. स्टॅक केलेल्या त्रिकोणांच्या श्रेणीत प्रत्येक आकारात किती छोटे त्रिकोण आहेत? तुम्हाला कोणती संख्या श्रेणी मिळते? हे का घडते याचे समजावून सांगू शकता का? (सूचना: प्रत्येक आकारात, प्रत्येक ओळीत किती त्रिकोण आहेत?)
5. कोच स्नोफ्लेक आकारांच्या श्रेणीत एका आकारापासून दुसऱ्या आकारात जाण्यासाठी, प्रत्येक रेषेचे segment '—' एक 'स्पीड बम्प' ने बदलले जाते. जेव्हा हे वारंवार केले जाते, तेव्हा बदल छोटे आणि छोटे होत जातात, ज्या रेषा भागाच्या लहान भागांमध्ये कमी होतात. कोच स्नोफ्लेक आकारातील प्रत्येक रेषेचे किती रेषा भाग आहेत? त्याला कोणती संबंधित संख्या श्रेणी मिळते? (उत्तर आहे: 3, 12, 48, ... म्हणजेच 3 गुणिले 4 च्या घातांमध्ये; ही श्रेणी तक्ता 1 मध्ये दाखवली गेली नाही.)

प्रयत्न करून  
पहा हा

## सारांश

- गणिताला एक पॅटर्न शोधण्याचे आणि त्या पॅटर्न का अस्तित्वात आहेत याचे स्पष्टीकरण शोधण्याचे म्हणून पाहता येऊ शकते.
- गणितात आढळणारे सर्वात मूलभूत पॅटर्न म्हणजे संख्या श्रेण्या.
- संख्या श्रेणींच्या काही महत्त्वपूर्ण उदाहरणांमध्ये मोजणीची संख्या, विषम संख्या, सम संख्या, वर्ग संख्या, त्रिकोणी संख्या, घन संख्या, विराहांक संख्या, आणि 2 चे घातक सामील आहेत.
- कधी कधी संख्या श्रेणी एकमेकांशी सुंदर आणि आश्चर्यकारक पद्धतीने संबंधित असू शकतात. उदाहरणार्थ, 1 पासून सुरू होणाऱ्या विषम संख्यांची बेरीज वर्ग संख्यांना देते.
- संख्या श्रेणीचे चित्रांच्या सहाय्याने दृश्य रूपात मांडणे हे श्रेण्या आणि त्यांच्यातील संबंध समजून घेण्यास मदत करू शकते.
- आकारांची श्रेणी ही गणितातील दुसरी मूलभूत प्रकारची पॅटर्न आहे. आकारांच्या श्रेणींच्या काही महत्त्वपूर्ण उदाहरणांमध्ये साधारण बहुभुज, पूर्ण ग्राफ, स्टॅक केलेले त्रिकोण आणि चौकोन, आणि कोच स्नोफ्लेक इतरेशन्स आहेत. आकारांच्या श्रेण्या देखील संख्या श्रेण्यांशी अनेक रोचक संबंध प्रदर्शित करतात.