

गणितांत नमुने



0674CH01

1.1 गणित म्हळ्यार कितें ?

गणित म्हळ्यार व्हड प्रमाणांत नमुन्याचो सोद आनी ते नमुने कित्याक अस्तित्वांत आसात हाचें स्पश्टीकरण करता.

अशे तरेचे नमुने खरेंच आमचे भोंवतणी अस्तित्वांत आसात – निसर्गांत, आमच्या घरांत, शाळांनी आनी सूर्य, चंद्र आनी ताऱ्यांचे गतींत. खरेदी आनी रांदप, बॉल उडोवप आनी खेळ खेळप, हवामानाचे नमुने समजून घेवप आनी तंत्रगिन्यान वापरप ह्या सगळ्या गजालींनी ते घडटात.

नमुन्याचो सोद आनी तांचे स्पश्टीकरण हो एक मजेशीर आनी सर्जनशील यत्न आसूं येता. ह्याच कारणाक लागून गणितज्ञ गणिताक एक कला आनी शास्त्र अशे दोनूय विचार करतात. ह्या वर्सा गणितीय नमुने सोदून काडपाक आनी समजून घेवपाक जी सर्जनशीलताय आनी कलात्मकता आसा ती पळोवपाची संद तुमकां मेळटली अशी आमी आस्त बाळगितात.

फकत खंयचे नमुने अस्तित्वांत आसात तें सोदून काडप न्हय, तर ते कित्याक अस्तित्वांत आसात हाचें स्पश्टीकरण करप हो गणिताचो हेतू आसा हें मतींत दवरप गरजेचें. अशे तरेचे स्पश्टीकरण चड करून ज्या संदर्भांत ते सोदून काडले त्या संदर्भा भायर आशिल्ल्या अनुप्रयोगांत वापरूं येतात, जे उपरांत मनीसपणाक फुडें व्हरपाक आदार करूंक शकतात.

देखीक, तारे, ग्रह आनी तांचे उपग्रह हांचे गतींतले नमुने समजून घेवन मानवजातीक गुरुत्वाकर्शणाचो सिध्दांत विकसीत करपाक मेळ्ळो आनी ताका लागून आमकां आमचे स्वताचे उपग्रह प्रक्षेपीत करपाक मेळ्ळ तशेंच चंद्राचेर आनी मंगळाचेर रॉकेट धाडपाक मेळ्ळे; तशेंच जीनोमांतले नमुने समजून घेतल्यार दुयेंसांचें निदान आनी बरे करपाक मदत जाल्या - अशा हेर हजारांनी उदाहरणां मदीं.

सोदून काडप

1. आमच्या दिसपट्टे जिणेंत गणित आमकां मजत करता अशा हेर उदाहरणांचो विचार करूंक शकतात?
2. मनीसपणाक फुडें व्हरपाक गणितान कशी मजत केल्या? (तुमी तातूंत आशिल्लीं उदाहरणां विचारांत घेवंक शकतात: शास्त्रीय प्रयोग करप; आमची अर्थवेवस्था आनी लोकशाय चलोवप; पूल, घरां वा हेर संकुल बांदावळी बांदप; टीव्ही, मोबायल फोन, संगणक, सायकली, गाडयो, विमानां, कॅलेंडर, घड्याळी आदी)

गणिताची
गजाली

1.2 आंकड्यांतले नमुने

गणितांत घडपी सगळ्यांत मुळाव्या नमुन्यांत आंकड्यांचे नमुने आसात, खास करून होल नंबर नमुने:

0, 1, 2, 3, 4, ...

होल नंबराच्या नमुन्याचो अभ्यास करपी गणिताच्या फांट्याक संख्या सिध्दांत अशें म्हण्टात.

संख्या अनुक्रम हो सगळ्यांत मुळावो आनी गणितज्ञ अभ्यास करपी सगळ्यांत मनभुलोवपी नमुन्यांमदलो एक प्रकार. तक्ता 1 हातूंत गणितांत अभ्यास केल्ले कांय मुखेल संख्या क्रम दाखयल्यात.

तक्ता 1: संख्या अनुक्रमांची उदाहरणां

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...	(सगले 1 चे)
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...	(आंकडो मेजप)
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	(विषम आंकडो)
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...	(सम आंकडो)
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...	(त्रिकोणी आंकडो)
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...	(चौकोन)
1, 8, 27, 64, 125, 216, ...	(क्यूब)
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...	(विरहांक आंकडो)
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...	(2 चे अधिकार)
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ...	(3 चे अधिकार)

☀ सोदून काडप

1. तक्ता 1 तल्या दरेक अनुक्रमांतलो नमुनो तुमी याद करूंक शकतात ?
2. दर एका अनुक्रमानांत फुडल्या तीन आंकड्यां वांगडा तुमच्या नोटबुकांत तक्ता 1 चो दरेक क्रम परत बरयात! दर एका अनुक्रमा उपरांत अनुक्रमान आंकडो तयार करपाचो नेम कितें तें तुमच्याच उतरांनी बरोवचें.

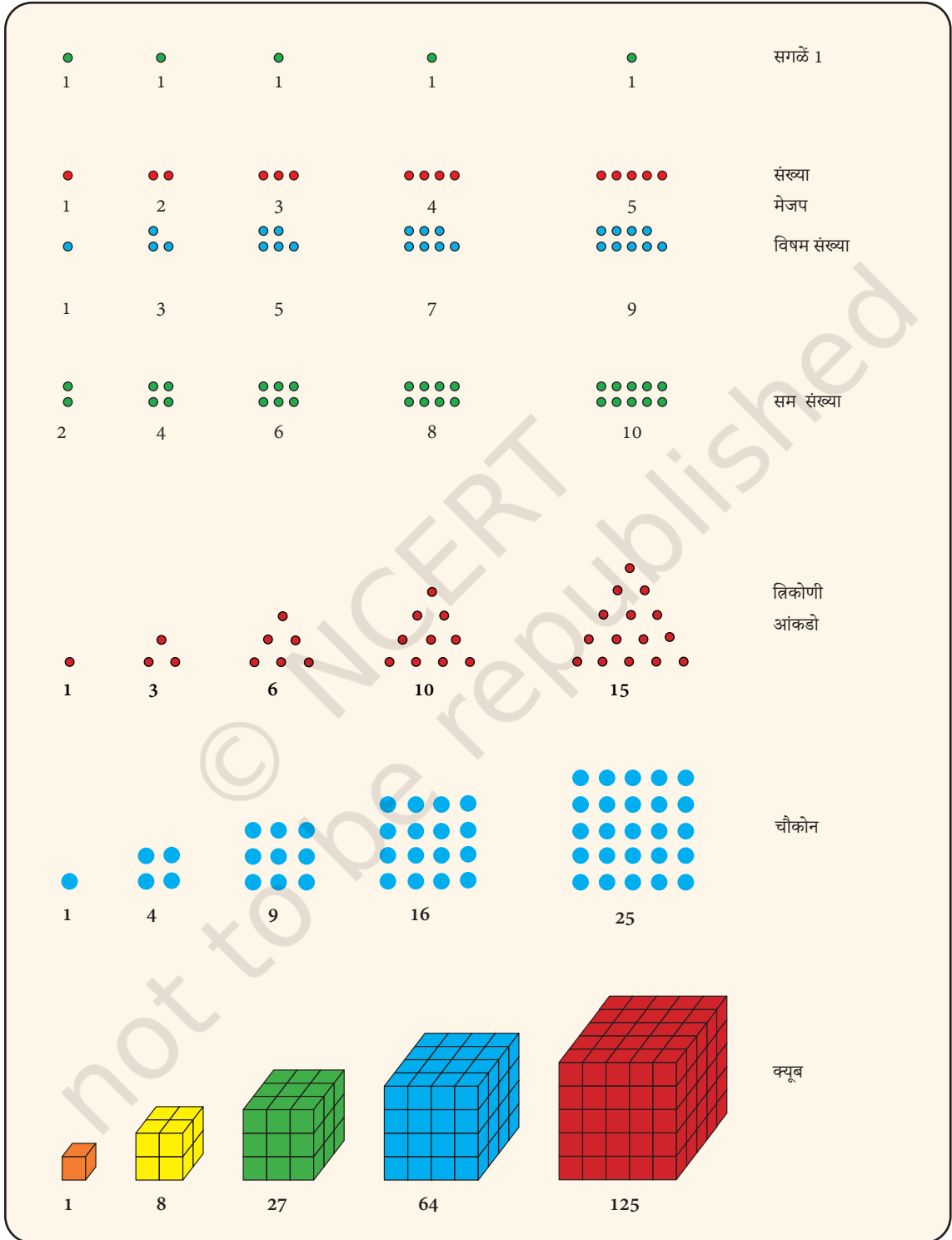
गणिताची
गजाली

1.3 क्रमांकाचे क्रम दिश्टी पडटात

चित्रांचो वापर करून जायते नंबर सिक्वेन्स पळोवंक मेळटात. चित्रां वा आकृतींतल्यान गणितीय वस्तूंचें दृश्टीकोन करप हो गणितीय नमुनो आनी संकल्पना समजून घेवपाचो एक खूब फळादीक मार्ग आसूं येता.

फुडलीं चित्रां वापरून तक्ता 1 तल्या पयल्या सात अनुक्रमांचें प्रतिनिधित्व करूया.

तक्ता 2: कांय संख्या अनुक्रमांचें चित्रात्मक निरूपण



सोदून काडप

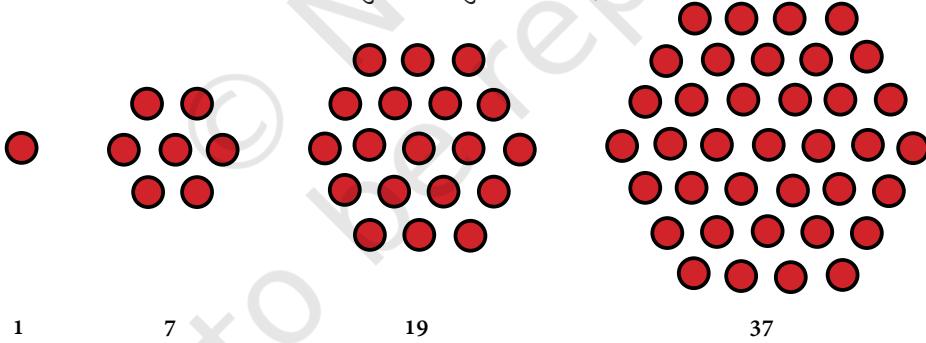
1. तुमच्या नोटबुकांत तक्ता 2 तल्या संख्या अनुक्रमांचें चित्रात्मक प्रतिनिधित्व काँपी करात, आनी दर एका अनुक्रमा खातीर फुडलें चित्र काडात !

2. 1, 3, 6, 10, 15 कित्याक.. **त्रिकोणी संख्या** म्हणटात? कित्याक? 1, 4, 9, 16, 25, .ताका चौकोनी आंकडो वा चौकोन म्हणटात? 1, 8, 27, 64, 125 कित्याक... घन म्हणटात ?

3. 36 हो त्रिकोणी आंकडो आनी चौकोनी आंकडो अशे दोनूय प्रकार तुमचे नदरेक आयले आसतले ! म्हळ्यार त्रिकोणांत आनी चौकोनांत 36 ठिपके परिपूर्ण तरेन मांडूंक मेळटात. हें दाखोवपी तुमच्या नोटबुकांत चित्रां तयार करात !

हाचेवयल्यान एकाच आंकड्याचें वेगळें प्रतिनिधित्व करूं येता, आनी संदर्भाप्रमाण वेगवेगळ्यो भुमिका करपाक मेळटात हें दिसून येता. हेर कांय आंकडो वेगवेगळ्या तरांनी चित्रात्मक रितीन दाखोवपाचो यत्न करात !

4. सकयल दिल्ल्या आंकड्यांच्या अनुक्रमाक तुमी कितें म्हणटले ?

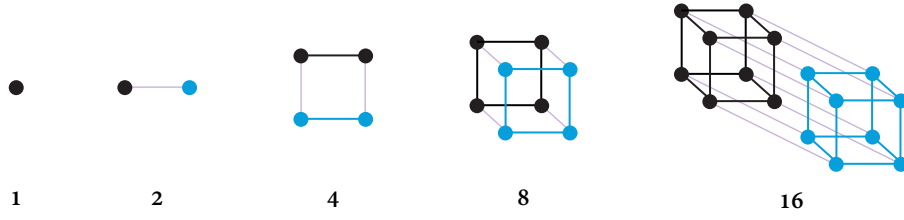


बरोबर आसा, तांकां षटकोनी संख्या म्हणटात ! हीं तुमच्या नोटबुकांत काडचीं. अनुक्रमांत फुडलो आंकडो कितें ?

5. पावर्स ऑफ 2 च्या अनुक्रमाची कल्पना करपाच्या चित्रात्मक मार्गाचो विचार करूं येता ? 3 चो पावर्स ?



च्या पावरा विशीं विचार करपाची एक संभाव्य पद्दत अशी:



1.4 संख्या अनुक्रमा मदले संबंद

केन्ना केन्नाय संख्या अनुक्रम एकामेकांकडेन अजापीत करपी पद्दतीन संबंदीत आसूं येतात.

देखीक: जेन्ना आमी विषम आंकडो जोडपाक सुरवात करतात तेन्ना कितें जाता ?

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

हो खऱ्या अर्थान सोबीत नमुनो !

☀ अशें कित्याक घडटा ? हें सदांकाळ घडटलें अशें तुमकां दिसता ?

ताची जाप म्हळ्यार नमुनो सदांकाळ घडटा. पूण कित्याक ? पयलीं सांगिल्ले प्रमाण नमुनो कित्याक घडटा हाचें कारण नमुन्या इतलेंच म्हत्वाचें आनी रोमांचक आसता.

एक चित्र तें स्पश्ट करूंक शकता

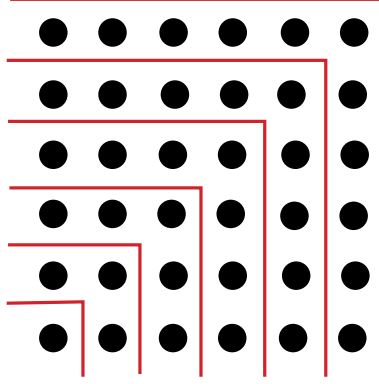
चित्रा वांगडा व्हिज्युअलायझेशन केल्यार घडणूक स्पश्ट करपाक मजत जाता. चौरस ग्रीडांत बिंदूंचो आंकडो मेजून चौकोनी आंकडो तयार करतात हें याद करात.

☀ चौरस ग्रीडातलें बिंदू आमी विषम संख्येच्या बिंदूंनी कशे तरेन विभागूंक शकतात: 1, 3, 5, 7, ... ?

फुडें वाचचे पयलीं क्षणभर विचार करात!



तें कशें करूं येता तें अशें:



ह्या चित्रांतल्यान आतां स्पश्ट जाता की

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.$$

कारण खंयच्याय आकाराच्या चौकोनाखातीर अशे तरेचें चित्र तयार करूं येता देखून विषम संख्या जोडल्यार चौरससंख्या कित्याक मेळटा हें स्पश्ट जाता.

☀ अशेच तरेचें चित्र काडून पयल्या 10 विषम आंकड्यांची बेरीज कितली हें सांगपाक शकता?

☀ आतां अशेच तरेचें चित्र कल्पना करून, वा गरजेप्रमाण आंशिकपणान काडून पयल्या 100 विषम आंकड्यांची बेरीज कितली हें सांगूं येता?

अनुक्रमांमदल्या अशा संबंदाचें आनीक एक उदाहरण:

सकयल जोडप

आमी सकयल दिल्लो नमुनो पळोवया:

$$1 = 1$$

$$1 + 2 + 1 = 4$$

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$$

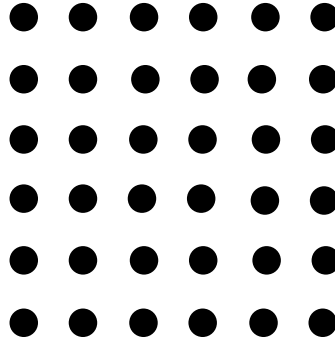
$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

हाका लागून चौकोनी आंकडो मेळोवपाचो आनीक एक मार्ग मेळटलो अशें दिसता- गिन्यानाचे आंकडे वयर आनी मागीर सकयल जोडून!

☀ अशेच तरेचें चित्रमय स्पश्टीकरण मेळूं येता ?

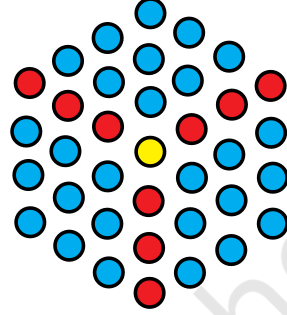
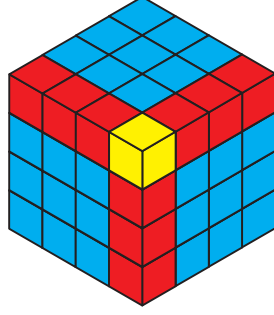


☀ सोदून काडप

1. गिन्यान संख्या वयर आनी सकयल जोडल्यार $1, 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 3 + 2 + 1, \dots$, वर्गसंख्या कित्याक मेळटा हाचें अशेंच चित्रात्मक स्पश्टीकरण मेळूं येता ?
2. तुमच्या चित्राची व्हडली आवृत्ती कल्पना करून, वा गरजे प्रमाण आंशिकपणान काडल्यार, $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1$ हांचें मोल कितें आसतलें तें पळोवंक मेळटलें ?
3. सगळें 1 चो क्रम जोडपाक सुरवात करता तेन्ना तुमकां खंयचो क्रम मेळटा ? सगळें 1 चो क्रम वयर आनी सकयल जोडल्यार तुमकां खंयचो क्रम मेळटा ?
4. गिन्यान आंकडो जोडपाक सुरवात केल्यार तुमकां खंयचो क्रम मेळटा ? तुमी ल्हान चित्रात्मक स्पश्टीकरण दिवं शकता ?
5. सलग त्रिकोणी आंकड्याच्यो जोडयो जोडल्यार कितें जाता ? म्हळ्यार $1 + 3, 3 + 6, 6 + 10, 10 + 15$ घेवप, ... खंयचो क्रम मेळटा ? कित्याक ? तुमी चित्रा वांगडा समजावन सांगूं शकता ?
6. 1 पसून सुरवात करपी 2 च्यो पावर जोडपाक सुरवात केल्यार कितें जाता, म्हळ्यार $1, 1 + 2, 1 + 2 + 4, 1 + 2 + 4 + 8, \dots$? आतां ह्या दरेक आंकड्यांत 1 जोडात – तुमकां खंयचे आंकडे मेळटात ? अशें कित्याक घडटा ?

हें करून पळयात

7. त्रिकोणी आंकड्यांक 6 न गुणाकार करून 1 जोडल्यार कितें जाता? खंयचो क्रम मेळटा? तुमी चित्रा वांगडा समजावन सांगूं शकता?
8. $1, 1 + 7, 1 + 7 + 19, 1 + 7 + 19 + 37, \dots$ हे षटकोनी आंकडे जोडपाक सुरवात केल्यार कितें जाता? खंयचो क्रम मेळटा? तुमी घनाचे चित्र वापरून ताचें स्पश्टीकरण करूं शकता?












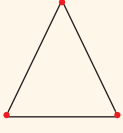
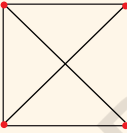






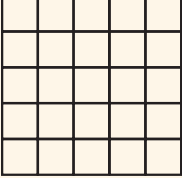



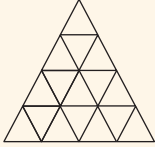
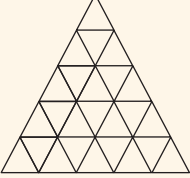

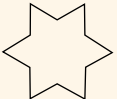
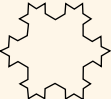
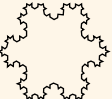
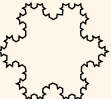
9. तक्ता 1 तल्या अनुक्रमांत आनी तातूंत तुमचे स्वताचे नमुने वा संबंद सोदून काडात. तीं चित्रा वांगडा कित्याक घडटात वा हेर तरेन कित्याक घडटात तें स्पश्ट करपाक शकता?

1.5 आकारांतले नमुने

गणितांत घडपी हेर म्हत्वाचे आनी मुळावे नमुने म्हळ्यार आकारांचे नमुने. हे आकार एक, दोन वा तीन परिमाणांत (1D, 2D वा 3D) आसूं येतात – वा ताचेपरस चड परिमाणांत आसूं येतात. आकारांतल्या नमुन्याचो अभ्यास करपी गणिताच्या शाखेक भूमिती अशें म्हण्टात..

आकार अनुक्रम हो आकार नमुन्याचो एक म्हत्वाचो प्रकार जाचो गणितज्ञ अभ्यास करतात. तक्ता 3 हातूंत गणितांत अभ्यास केल्ले कांय मुखेल आकार क्रम दाखयल्यात..

तक्ता 3: आकार अनुक्रमांची उदाहरणां

				नेमान बहुभुज	
त्रिकोण	चतुर्भुज	पंचकोन	षटकोन		
					
स्पतकोन	अश्टकोन	णवकोन	दशकोन		
					पुराय आलेख
K2	K3	K4	K5	K6	
					स्टेक चौकोन
					स्टेक त्रिकोण
					कोच स्रोप्लेक

☀ सोदून काडप

1. तक्ता 3 तल्या दरेक अनुक्रमांतलो नमुनो तुमी वळखूंक शकतात ?
2. तुमच्या नोटबुकांत तक्ता 3 तलो दरेक क्रम परतून काडपाचो यत्न करात. दर एका अनुक्रमान फुडलो आकार काडूं येता ? कित्याक वा कित्याक ना ? दर एका अनुक्रमा उपरांत अनुक्रमान आकार तयार करपाचो नेम वा नमुनो कितें हें तुमच्याच उतरांनी सांगचें.

गणिताची
गजाल

1.6 संख्या अनुक्रमांकडेन संबंद

चड करून आकार अनुक्रम अचकीत करपी पद्दतीन संख्या अनुक्रमांकडेन संबंदीत आसतात. आकार क्रम आनी संबंदीत संख्या अनुक्रम ह्या दोनूय गजालींचो अभ्यास आनी समजून घेवपाक अशे संबंद उपेगी थारूंक शकतात..

देखीक: नियमित बहुभुजांच्या आकार क्रमांतल्या बाजूंचो आंकडो 3 सावन सुरू जावपी गिन्यान आंकड्यांनी दिल्लो आसता, म्हळ्यार 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, तेखातीर ह्या आकारांक अनुक्रमान नेमान त्रिकोण, चतुर्भुज (म्हळ्यार चौकोन), पंचकोन, षटकोन, सप्तकोन, अष्टकोन, णवकोन, दशकोन आदी नांवां आसात.

ह्या आकारांक समान लांबायेच्यो बाजू आसतात आनी तशेंच समान 'कोन' आसतात (म्हळ्यार बाजू एकसारक्यो दिसतात आनी कोनशेय एकसारके दिसतात) हाचो अर्थ 'नियमित' ह्या उतराचो जाता. फुडल्या अध्यायांत आमी कोनांची चड खोलायेन चर्चा करतले..

तक्ता 3 तल्या हेर आकार अनुक्रमांचोय संख्या अनुक्रमांकडेन सोबीत संबंद आसा..

☀ सोदून काडप

1. नियमित बहुभुजांच्या अनुक्रमान दरेक आकारांतल्या बाजूंचो आंकडो मेजचो. खंयचो नंबर क्रम मेळटा ? रेग्युलर बहुभुजांच्या क्रमांत दर एका आकारांतल्या कोनशांच्या संख्येचें कितें ? तोच आंकडो क्रम मेळटा व्हय ? हें कित्याक घडटा तें स्पश्ट करपाक शकता ?
2. पुराय आलेखांच्या क्रमांत दरेक आकारांतल्या ओळींचो आंकडो मेजचो. खंयचो नंबर क्रम मेळटा ? कित्याक तें स्पश्ट करपाक शकता ?

हें करून
पळयात

3. स्टॅकड स्क्वेअरांच्या अनुक्रमाच्या दर एका आकारांत कितले ल्हान चौकोन आसतात?
हाका लागून खंयचो आंकडो क्रम मेळटा? कित्याक तें स्पश्ट करपाक शकता?
4. स्टॅकड त्रिकोणांच्या अनुक्रमाच्या दर एका आकारांत कितले ल्हान त्रिकोण आसतात?
हाका लागून खंयचो आंकडो क्रम मेळटा? कित्याक तें स्पश्ट करपाक शकता?(संकेत:
अनुक्रमान दरेक आकारांत दर एका पंगडांत कितले त्रिकोण आसतात?)
5. '___' 'स्पीड बंप' वरवीं बदल खूब ल्हान रेशेचे विभाग आशिल्ल्यान ल्हान आनी ल्हान जातात. कोच स्लोफ्लेकाच्या दरेका आकारांत वट्ट रेशेचे कितले विभाग आसात?
संबंदीत संख्या क्रम कितें? (जाप 3, 12, 48, ..., म्हळ्यार 4 च्या 3 पट पावर; हो क्रम तक्ता 1 त दाखयल्लो ना.) जशें कोणूय हें चडांत चड फावट करता.

हें करून
पळयात

सारांश

- गणिताकडेन नमुन्याचो सोद आनी ते नमुने कित्याक अस्तित्वां आसात हाचें स्पश्टीकरण म्हूण पळोवंक मेळटा.
- गणितांत घडपी सगळ्यांत मुळाव्या नमुन्यांत संख्या अनुक्रम आसात.
- संख्या अनुक्रमांचीं कांय म्हत्वाचीं उदाहरणां म्हळ्यार गिन्यान संख्या, विषम संख्या, सम संख्या, चौरस संख्या, त्रिकोणी संख्या, घनसंख्या, विरहंकसंख्या आनी 2चो पावर.
- केन्ना केन्नाय संख्या अनुक्रम सोबीत आनी उल्लेखनीय पद्दतीन एकामेकांकडेन संबंदीत आसूं येतात देखीक पसून सुरू जावपी विषम संख्यांचो क्रम जोडल्यार चौरस संख्या मेळटा.
- चित्रां वापरून संख्या अनुक्रम व्हिज्युअलायझ केल्यार अनुक्रम आनी तांचे मदले संबंद समजून घेवपाक मजत जाता.
- आकार अनुक्रम हो गणितांतलो आनी एक मुळावो प्रकारचो नमुनो आकार अनुक्रमांचीं कांय म्हत्वाचीं उदाहरणां म्हळ्यार नेमान बहुभुज पुराय आलेख स्टॅकड त्रिकोण आनी चौकोन आनी कोच स्लोफ्लेक पुनरावृत्ती आकार अनुक्रम संख्या अनुक्रमांकडेन जायते मनोरंजक संबंद दाखयतात.