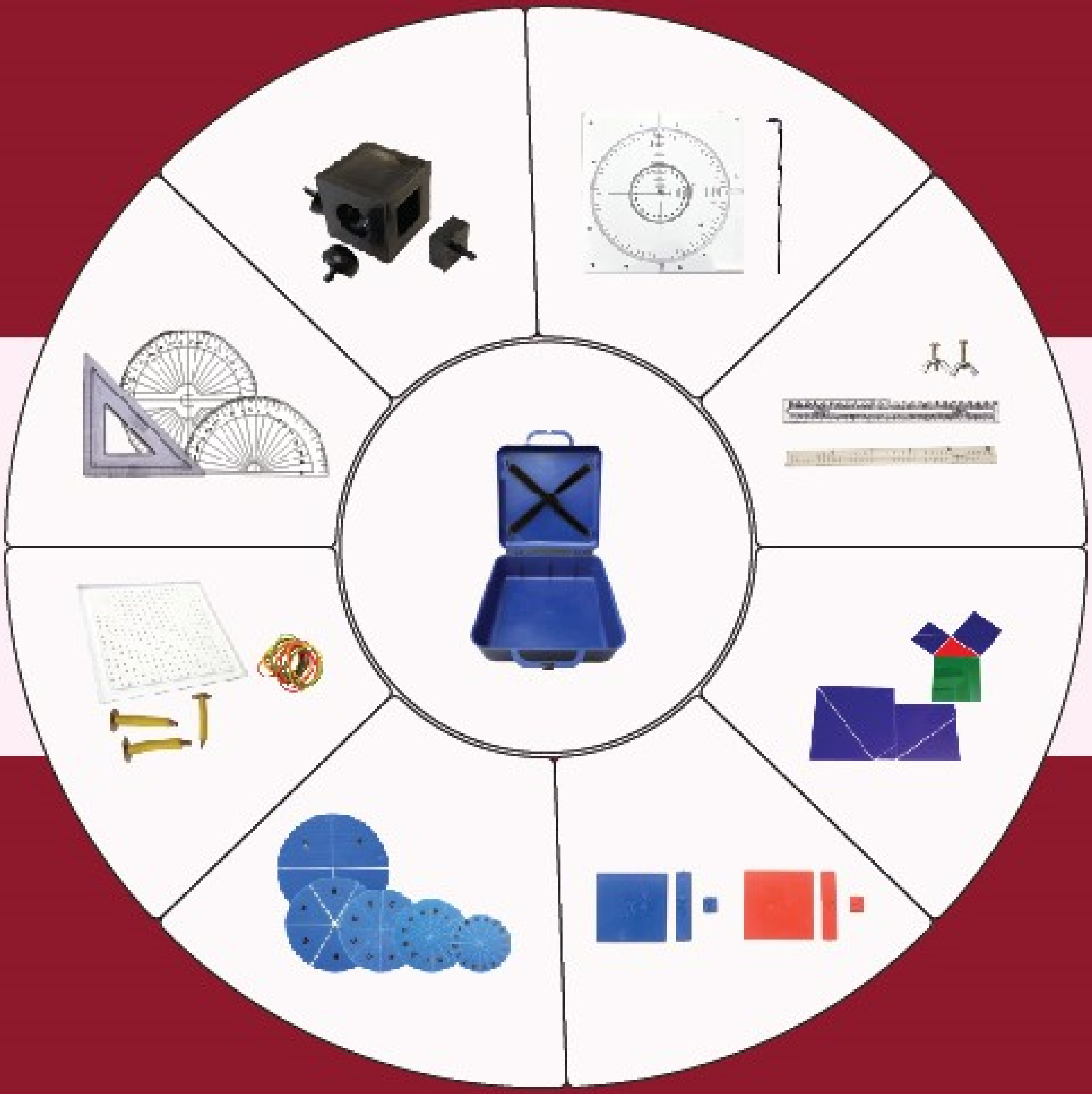
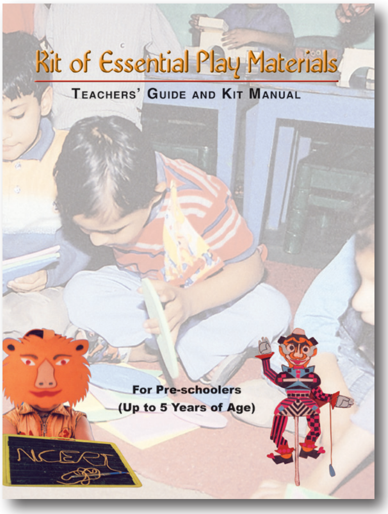
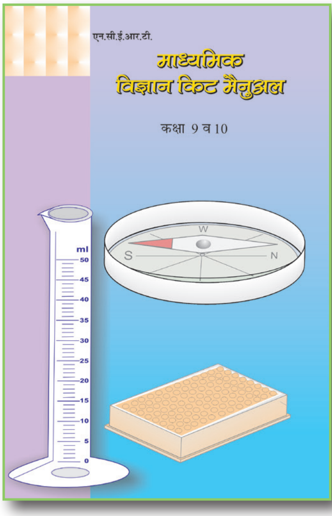
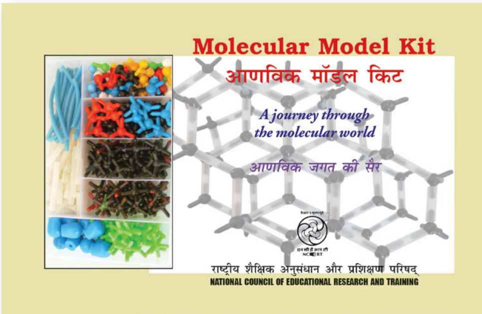
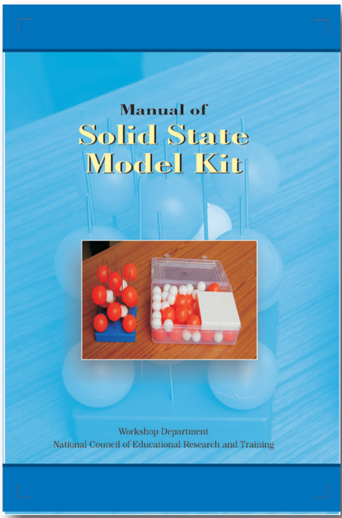
माध्यमिक गणित किट
निर्देश पुस्तिका
कक्षा 9 व 10











For further enquiries, please visit www.ncert.nic.in or contact the Business Managers at the addresses of the regional centres given on the copyright page.

माध्यमिक गणित किट
निर्देश पुस्तिका
कक्षा 9 व 10

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

13244 – माध्यमिक गणित किट निर्देश पुस्तिका

ISBN 978-93-5580-160-9

प्रथम संस्करण

जनवरी 2023 माघ 1944

PD 15T RPS

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नई दिल्ली 110 016 **फोन : 011-26562708**

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बैंगलुरु 560 085 **फोन : 080-26725740**

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 **फोन : 079-27541446**

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप पनिहटी
कोलकाता 700 114 **फोन : 033-25530454**

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781 021 **फोन : 0361-2674869**

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग	:	*एम. वी. श्रीनिवासन*
मुख्य उत्पादन अधिकारी (प्रभारी)	:	जहान लाल
मुख्य व्यापार प्रबंधक	:	*अमिताभ कुमार*
मुख्य संपादक	:	*बिज्ञान सुतार*
संपादन सहायक	:	*ऋषिपाल सिंह*
उत्पादन सहायक	:	*दीपक जैसवाल*

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 से प्रकाशित।

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा (एन.सी.एफ)—2005 की संस्तुतियों में से सबसे अधिक महत्वपूर्ण संस्तुति बच्चे की विचार प्रक्रियाओं का गणितीयकरण करना है। इस लक्ष्य की प्राप्ति में ठोस (मूर्त) गणितीय अनुभव एक बड़ी भूमिका अदा करते हैं। बच्चा विभिन्न क्रियाकलापों में विभिन्न ठोस वस्तुओं के साथ कार्य करने के लिए प्रेरित होता है। क्रियाकलापों के अतिरिक्त, गणित के खेल भी प्रयुक्तियों तथा विवेचन द्वारा बच्चे की अधिगम संबद्धता में सहायता करते हैं। ऊपर वर्णित विधि के माध्यम से गणितीय अवधारणाओं के अधिगम के लिए रा.शै.अ.प्र.प. की नवीनतम विकसित गणित पाठ्यपुस्तकों से ली हुई कुछ अवधारणाओं के आधार पर माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों के लिए एक बाल-केन्द्रित गणित किट विकसित की गई है। इस किट में क्रियाकलापों को करने हेतु एक निर्देश पुस्तिका सहित अनेक किट की वस्तुएँ सम्मिलित हैं। इस किट में बृहत रूप से ज्यामिति, बीजगणित, त्रिकोणमिति और क्षेत्रमिति क्षेत्रों से क्रियाकलापों का समावेश किया गया है। इस किट के निम्नलिखित लाभ हैं—

- आवश्यक सामग्री की एक ही स्थान पर उपलब्ध्ता
- वस्तुओं का बहुउद्देशीय उपयोग
- क्रियाकलापों के करने में समय की बचत
- एक स्थान से दूसरे स्थान तक पहुँचाने की सुविधा
- शिक्षक के अन्वेषण हेतु सुविधा
- कम लागत वाली सामग्री तथा देसी संसाधनों का उपयोग

किट की वस्तुओं के कुछ विशिष्ट अभिलक्षण

छिद्रों और चिह्नों सहित दो प्रकार की प्लास्टिक की पट्टियाँ दी हुई हैं। ये कोणों, त्रिभुजों, चतुर्भुजों के बनाने में तथा त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान निर्धारित करने में सहायता करती हैं। कोणों, त्रिभुजों और चतुर्भुजों से संबंधित क्रियाकलापों में कोणों को मापने के लिए पट्टियों पर संपूर्ण या अर्ध चाँदा लगाया जा सकता है।

एक वृत्ताकार बोर्ड इस प्रकार डिज़ाइन किया गया है कि उसे एक वृत्त से संबंधित तथा साथ ही त्रिकोणमितीय अनुपातों से संबंधित परिणामों का सत्यापन करने में उपयोग किया जा सकता है।

जियोबोर्ड विमाओं 19 सेंमी. ×19 सेंमी. × 1 सेंमी. वाला एक बोर्ड है, जिसमें एक पर एक-एक सेंमी. की दूरी पर छेद बने हुए हैं। जियोबोर्ड पिनों को, इन छेदों (छिद्रों) में स्थिर किया जा सकता है तथा रबर बैंड की सहायता से विभिन्न ज्यामितीय आकार बनाए जा सकते हैं।

समानांतर चतुर्भुज, त्रिभुज, समलंब और वृत्त के रूप में कोरूगेटेड शीटों के कट-आउट क्षेत्रफलों से संबंधित अवधारणाओं के अधिगम में सहायता करते हैं।

घनाभ, बेलन, शंकु और अर्धगोले के समायोजित कट-आउटों के साथ एक घन दिया गया है, जो पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन की संकल्पनाओं को स्पष्ट करता है।

त्रिभुजों, चतुर्भुजों और आयतों इत्यादि के रूप के प्लास्टिक या कार्डबोर्ड के कट-आउट, पाइथागोरस प्रमेय तथा $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ जैसी बीजीय सर्वसमिकाओं के सत्यापन हेतु दिए गए हैं।

एक अन्य रोचक वस्तु ''बीजीय टाइल'' भी दी गई हैं। ये दो अलग-अलग रंगों में तथा तीन विभिन्न साइज़ों में दी गई हैं। इन्हें द्विघात बहुपदों के गुणनखंडों की अवधारणा के मूर्तकरण के लिए उपयोग किया जा सकता है।

शैक्षिक रूप से उपयोगी होने के साथ ही किट को आकर्षक विधि से डिजाईन किया गया है । आशा की जाती है कि यह किट माध्यमिक स्तर पर गणित अधिगम के लिए पर्याप्त रुचिकर होगी। यह पूरे देश के स्कूलों में गणित संसाधन कक्ष का एक महत्तवपूर्ण अंग सिद्ध होगी।

इस मैनुअल को राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के आलोक में संशोधित किया गया है और तदनुसार इसका नाम भी बदल दिया गया है।

आर. के. पाराशर
प्रोफेसर एवं *अध्यक्ष*,
शैक्षिक किट प्रभाग

किट पुस्तिका निर्माण समिति

सदस्य

ए. के. वज़लवार, *अध्यक्ष,* गणित एवं विज्ञान शिक्षा विभाग, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

एस. के. एस. गौतम (सेवानिवृत), रा.शै.अ.प्र.प.

धर्म प्रकाश (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प.

पी. के चौरसिया, *एसोसिएट प्रोफेसर* (संयोजक) रा.शै.अ.प्र.प.

मनोज वर्मा, *पी. जी. टी.*, केंद्रीय विद्यालय, तुगलकाबाद

महेन्द्र शंकर, *सेवानिवृत्त प्रवक्ता* (सलेक्श्न ग्रेड), रा.शै.अ.प्र.प.

राम अवतार (*सेवानिवृत्त*), रा.शै.अ.प्र.प.

समन्वयक सदस्य

टी.पी. शर्मा, *असिस्टेंट प्रोफेसर*, गणित एवं विज्ञान शिक्षा विभाग, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

आभार

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, शैक्षिक किट प्रभाग के प्रो. एच. ओ. गुप्ता के प्रति सुझाव और समर्थन प्रदान करने हेतु विशेष आभार ज्ञापित करती है। परिषद्, प्रभाग के कर्मचारियों वी. बी. पाटिल, *तकनीकी अधिकारी*, चित्र बनाने के लिए अनिल नायल, *ड्राफ्टमैन*, सतीश कुमार, *फोरमैन*, नरगिस इस्लाम *डी.टी.पी. ऑपरेटर* (संविदा) के योगदान को धन्यवाद सहित स्वीकार करती है।

इस निर्देश पुस्तिका के हिन्दी संस्करण के विकास में योगदान के लिए परिषद्, एस के सिंह गौतम, (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प.; ओ.एन.सिंह, (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प.; वी पी सिंह, (सेवानि*वृत्त)*, रा.शै.अ.प्र.प.; के प्रति भी आभार प्रकट करती है।

परिषद्, पुस्तिका के मुद्रण एवं प्रकाशन में सहयोग हेतु अध्यक्ष प्रकाशन प्रभाग के प्रति कृतज्ञता व्यक्त करती है

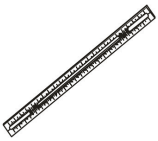
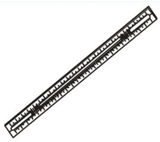
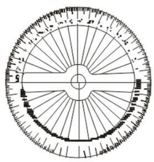
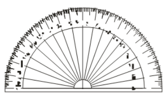
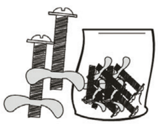
परिषद्, इस पुस्तिका की प्रूफरीडिंग एवं संपादन हेतु अतुल गुप्ता, *सहायक संपादक* हिंदी (संविदा); पृष्ठों की साज-सज्जा हेतु सुरेंद्र कुमार, *डीटीपी*. ऑपरेटर एवं *प्रभारी* डीटीपी. सेल, गन्धर्व, *डीटीपी*. ऑपरेटर (संविदा) के प्रति हार्दिक आभार प्रकट करती है।

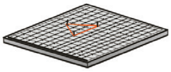
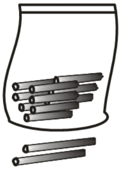
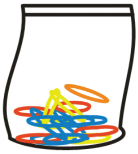
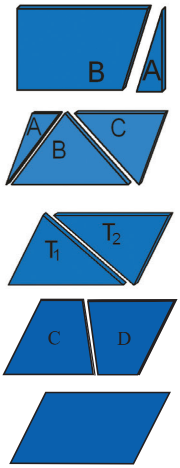
विषय सूची

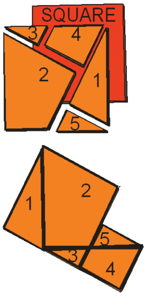
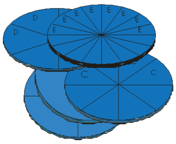
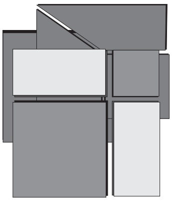
माध्यमिक गणित किट

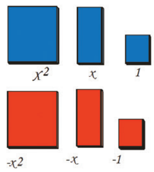
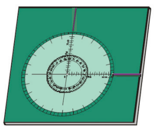
कक्षा 9 और 10

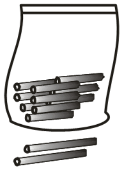
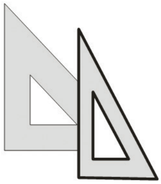
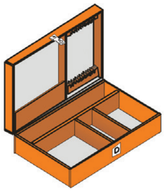
तकनीकी निर्दिष्टीकरण

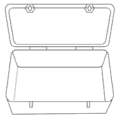
क्र.सं.	चित्र के नाम	चित्र	निर्दिष्टीकरण	मात्रा
1.	प्लास्टिक की पट्टी (A टाइप)		घनाभाकार पर्सपेक्स जिसमें 5 मिमी. चौड़ाई वाले 0-30 मिमी. 50-200 मिमी. और 220-250 मिमी. पर तीन छिद्र हैं।	08
2.	प्लास्टिक की पट्टी (B टाइप)		घनाभाकार पर्सपेक्स जिसमें 5 मिमी. चौड़ाई वाले 0-0.3 डेमी., 0.5-2.0 डेमी. और 2.2-2.5 डेमी. पर तीन छिद्र हैं।	03
3.	संपूर्ण चाँदा		120 मिमी. व्यास वाली एक 3 मिमी. मोटी वृत्ताकार पारदर्शी प्लास्टिक शीट जिस पर 0-360 डिग्री अंकित है।	04
4.	अर्ध चाँदा		90 मिमी. व्यास वाली 3 मिमी. मोटी अर्धवृत्ताकार पारदर्शी शीट जिस पर 0–180 डिग्री अंकित हैं।	04
5.	चूड़ीदार नट और पेंच		यह विंग के साथ नट तथा क्रोमियम की प्लेट चढ़े पेंच का संयोजन है जिसमें वाइल्ड स्टील की बनी 20 मिमी. लंबाई और 4 मिमी. व्यास की मैट्रिक डोर (M_4) है, जिसमें छिद्र हुआ गोल शीर्ष या एचडीपीई मोल्ड है।	15 सेट

6.	जियोबोर्ड		एबीएस सामग्री बोर्ड एक सतह पर 2 मिमी. व्यास और 7 मिमी. गहराई के सूक्ष्म छिद्र (ब्लाइंड होल) द्वारा निर्मित वर्गाकार ग्रिडों की एक श्रंखला है । दूसरी सतह में 2.5 मिमी. व्यास और 10 मिमी. लम्बाई के अंतर्निहित डॉवेल द्वारा गठित संकेदित वृत्तों की एक श्रंखला है ।	01
7.	जियोबोर्ड की पिन		स्टेनलैस स्टील से बनी 18 मिमी. लंबी और 2 मिमी. व्यास वाली ठोस बेलनाकार पिन सैंपल के अनुसार।	20
8.	रबर बैंड		बहुरंगीय और विभिन आकारों के रबर बैंड	20
9.	कट आउट (बहुभुजों के क्षेत्रफल के लिए)		मानक वस्तु– नीले रंग की 3 मिमी. मोटी कोरूगेटेड शीट, विभिन्न आकारों के कट-आउट में, जिनके आकार निम्नलिखित हैं— 1. एक त्रिभुज और समलंब जिन पर A और B अंकित हैं। 2. तीन त्रिभुज जिन पर, A, B और C अंकित हैं। 3. दो त्रिभुज जिन पर क्रमश: T_1 और T_2 अंकित हैं। 4. दो समलंब जिन पर क्रमश: C और D अंकित हैं। 5. एक समानांतर चतुर्भुज	प्रत्येक का 01 सेट

10.	कट आउट (पाइथागोरस के लिए)		5 मिमी. मोटे कार्डबोर्ड के बने हैं तथा इनमें सम्मिलित हैं— 1. 125 मिमी. भुजा का वर्ग। 2. 125 मिमी. भुजा वाले एक अन्य वर्ग से प्राप्त हुए भिन्न-भिन्न आकारों के 5 कट-आउट 3. 125 मिमी. कर्ण वाला एक त्रिभुजाकार कट-आउट। 4. उपरोक्त त्रिभुजाकार कट-आउट की ऊँचाई और आधार के बराबर भुजाओं के दो वर्ग।	प्रत्येक का 01 सेट
11.	कट आउट (वृत्त के क्षेत्रफल के लिए)		5 मिमी. मोटी और 160 मिमी. व्यास वाली नीले रंग की 5 वृत्ताकार कोरूगेटेड शीट जो 4,6,8,12 और 16 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित हैं।	प्रत्येक का 01 सेट
12.	कट आउट (बीजीय सर्वसमिकाओं के लिए)		5s मिमी. मोटे कार्डबोर्ड से बने हैं तथा इसमें सम्मिलित हैं— 1. 76 मिमी. भुजा वाला वर्ग कट-आउट। 2. 76 मिमी. भुजा वाले एक अन्य वर्ग से प्राप्त 3 कट-आउट, जिनमें एक 38 मिमी. भुजा का वर्ग है तथा शेष दो विमाओं 38×76 मिमी.^{2} के समलंब हैं। 3. 80 मिमी. भुजाओं और 45 मिमी. वाले वर्ग कट-आउट 4. विमाओं 80×45 मिमी.^{2} वाले आयताकार कट-आउट।	प्रत्येक का 01 सेट

13.	बीजीय टाइल्स (क) x^2, x, 1 (ख) $-x^2$, $-x$, -1		5 मिमी. मोटी प्लास्टकि कार्डबोर्ड से बनाई गई x^2, x, 1; $-x^2$,-x, -1 आकार की बीजीय टाइल्स (1) $-x^2$, x^2: 50 मिमी. × 50 मिमी. (5 टाइल्स × 2). (2) -x, x: 50 मिमी. × 10 मिमी. (20 टाइल्स × 2). (3) -1, 1: 10 मिमी. × 10 मिमी. (20 टाइल्स × 2). $-x^2$, -x और -1 लाल रंग की है, तथा x^2, x और 1 नीले रंग की है।	प्रत्येक का 01 सेट
14.	त्रिकोणमितीय वृत्ताकार बोर्ड		त्रिकोणमितीय वृत्ताकार छिद्र: 260 मिमी. × 260 मिमी. × 12 मिमी. प्लास्टिक बोर्ड से 5 मिमी. चौड़ा और 6 मिमी. गहरा एक वृत्ताकार खांचा है (व्यास 200 मिमी.) इस पर निर्देशांक अक्ष अंकित है। आंतरिक वृत (व्यास 92 मिमी.) पर डिग्री अंकित है। केंद्र पर सूक्ष्म छिद्र जिनका व्यास 5 मिमी. तथा गहराई 10 मिमी. है। इस बोर्ड पर तीन आयताकार खाँचे (5 मिमी. चौड़े और 10 मिमी. गहरे) है जो वृत्ताकार खाँचे को स्पर्श करते है। बोर्ड में 6 मिमी. व्यास वाले 15 सूक्ष्म छिद्र है।	01
15.	संयोजक कनेक्टर (वृत्ताकार बोर्ड के लिए)		रबर चढ़े हुए, स्टेनलेस स्टील के पेंच जिनकी लंबाई 25 मिमी., व्यास 5 मिमी. तथा एक गोल शीर्ष है।	15

16.	कनेक्टर्स (पट्टी के लिए)		लंबाई 20 मिमी., व्यास 4 मिमी. वाले सपाट गोल शीर्ष के पेंच जिनके कटे हुए सिरे हैं तथा रबड़ चढ़ी है।	10
17.	सेट स्क्वायर		मानक बीच के साइज़ के अनुसार।	प्रत्येक का 01 सेट
18.	घूर्णन सुई		200 मिमी. लंबी और 3 मिमी. व्यास वाली एक स्टील की छड़, जिसमें छड़ के एक ओर एक 'एल' बैंड लगा हुआ है।	01
19.	घन के साथ कट आउट • शंकु • घनाभ • बेलन • अर्धगोला		60मिमी. भुजा का एक ठोस घन, जिसमें निम्न कट-आउट लगे हुए हैं— 1. विमाओं 30×30×15 मिमी.^{3} वाला घनाभ 2. ऊँचाई 30 मिमी. और व्यास 30 मिमी. वाला शंकु 3. व्यास 30 मिमी. वाला अर्धगोला 4. ऊँचाई 20 मिमी. और व्यास 20 मिमी. वाला बेलन	प्रत्येक का 01 सेट
20.	कार्टन के साथ किट बॉक्स		एक पेटी, जिसमें, उपयुक्त कब्ज़े लगे हैं तथा किट की वस्तुएँ रखने के लिए अंदर पॉकेट बनी हैं और इसमें ताला लगाने की भी व्यवस्था है।	01

21.	प्लास्टिक बॉक्स		80 मिमी. x 70 मिमी. x 40 मिमी.	01

बाल अधिकार घोषणा पत्र

अठारह साल से कम उम्र का हर व्यक्ति बच्चा है। बच्चे की देख-रेख और पालन-पोषण की ज़िम्मेदारी बुनियादी तौर पर माँ-बाप के ऊपर होती है। राज्य प्रत्येक बच्चे के अधिकारों का सम्मान करता है और उन्हें साकार करने के लिए प्रतिबद्ध है।

प्रतिष्ठा और अभिव्यक्ति

* मुझे अपने अधिकारों के बारे में जानने का हक है। *(अनुच्छेद 42)*
* बच्चा होने के नाते मुझे अधिकार मिले हैं। मैं कौन हूँ, कहाँ रहता/रहती हूँ, मेरे माँ-बाप क्या करते हैं, मेरी भाषा क्या है, मेरा धर्म क्या है, मैं लड़का हूँ या लड़की, मेरी संस्कृति कौन-सी है, मैं विकलांग हूँ या नहीं, मैं गरीब हूँ या अमीर, इस बात से कोई फ़र्क नहीं पड़ता। किसी भी आधार पर मेरे इन अधिकारों को नहीं छीना जा सकता, सभी को यह बात जाननी चाहिए। *(अनुच्छेद 2)*

* मुझे अपनी राय स्वतंत्र रूप से व्यक्त करने का अधिकार है जिसे गंभीरता से लेना चाहिए। सभी की यह ज़िम्मेदारी है कि वे दूसरों की बात सुनें। *(अनुच्छेद 12, 13)*
* मुझे गलती करने का अधिकार है और सभी को मानना चाहिए कि हम अपनी गलतियों से सीखते हैं। *(अनुच्छेद 28)*
* मुझे सभी कार्रवाईयों में शामिल होने का अधिकार है, चाहे मेरी क्षमताएँ भिन्न हैं। सभी को दूसरों की भिन्न क्षमताओं का सम्मान करना चाहिए। *(अनुच्छेद 23)*

विकास

* मुझे अच्छी शिक्षा का अधिकार है और यह हर व्यक्ति की ज़िम्मेदारी है कि वह सभी बच्चों को पढ़ने के लिए प्रोत्साहित करे। *(अनुच्छेद 23, 28, 29)*
* मुझे अच्छी स्वास्थ्य चिकित्सा का अधिकार है और यह प्रत्येक व्यक्ति की ज़िम्मेदारी है कि वह औरों को भी बुनियादी स्वास्थ्य सेवा और पीने का साफ़ पानी मुहैया कराने में मदद करे। *(अनुच्छेद 24)*
* मुझे भरपेट खाने का अधिकार है और हर व्यक्ति की यह ज़िम्मेदारी है कि वह किसी को भी भूखा न मरने दे। *(अनुच्छेद 24)*

* मुझे स्वच्छ पर्यावरण का अधिकार है और हर व्यक्ति की यह ज़िम्मेदारी है कि वह इसे प्रदूषित न करे। *(अनुच्छेद 29)*
* मुझे खेलने और आराम करने का अधिकार है। *(अनुच्छेद 31)*

देखभाल और सुरक्षा

* मेरा अधिकार है कि मुझे प्यार मिले और किसी भी तरह के दुराचार व नुकसान से मुझे बचाया जाए। हर एक की ज़िम्मेदारी है कि वह औरों की देखभाल करे व उनके साथ स्नेह भाव से रहे। *(अनुच्छेद 19)*

* मुझे सुरक्षित परिवार तथा आरामदेह घर का अधिकार है। हर व्यक्ति की ज़िम्मेदारी है कि वह इस बात का खयाल रखे कि सभी बच्चों को परिवार और घर मिले। *(अनुच्छेद 9, 27)*
* मुझे अपनी विरासत और मान्यताओं पर गर्व करने का अधिकार है। हर व्यक्ति की ज़िम्मेदारी है कि वह औरों की संस्कृति व मान्यताओं का सम्मान करे। *(अनुच्छेद 29, 30)*
* मुझे हिंसा (मौखिक, शारीरिक, भावात्मक) के बिना जीवन जीने का अधिकार है। हर एक की ज़िम्मेदारी है कि वह किसी के साथ अत्याचार न करे। *(अनुच्छेद 28, 37)*

* मुझे आर्थिक और यौन शोषण से सुरक्षा का अधिकार है। हर एक की यह ज़िम्मेदारी है कि वह किसी भी बच्चे को काम पर न रखे और बच्चों को एक आज़ाद और सुरक्षित माहौल मुहैया कराए। *(अनुच्छेद 32, 34)*
* मुझे किसी भी तरह के शोषण से सुरक्षा का अधिकार है। हर व्यक्ति की ज़िम्मेदारी है कि वह इस बात का खयाल रखे कि कोई किसी भी तरह से मुझे इस्तेमाल न करे और मेरा फ़ायदा न उठाए। *(अनुच्छेद 36)*

बच्चों से संबंधित सभी कार्रवाईयों में बच्चों के हितों को प्राथमिकता दी जाएगी

ये सारे अधिकार और ज़िम्मेदारियाँ संयुक्त राष्ट्र बाल अधिकार कनवेंशन, 1989 में उल्लेखित हैं। इस कनवेंशन में उन सारे अधिकारों को शामिल किया गया है जो दुनिया भर के बच्चों को मिले हुए हैं। भारत सरकार ने इस दस्तावेज़ पर 1992 में दस्तखत किए थे।

स्रोत – राष्ट्रीय बाल अधिकार संरक्षण आयोग (एन.सी.पी.सी.आर.), भारत सरकार

क्रियाकलाप 1

कोणों का मापन

उद्देश्य

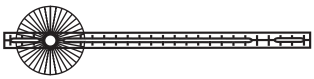
विभिन्न कोण बनाना तथा उन्हें मापना।

वाँछित सामग्री

दो प्लास्टिक की पट्टियां, संपूर्ण चाँदा, फ्लाई चूड़ीदार पेंच।

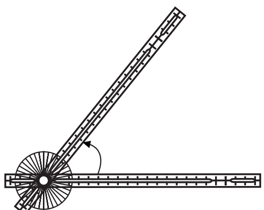
कैसे प्रारंभ करें?

1. दो प्लास्टिक की पट्टियाँ तथा एक संपूर्ण चाँदा लीजिए।
2. दोनों पट्टियों को चाँदे सहित उनके अंत बिंदुओं पर फ्लाई पेंच की सहायता से स्थिर कीजिए।
3. इन पट्टियों में से एक को चाँदे की अंकित रेखा $0°–180°$ के अनुदिश स्थिर कीजिए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।

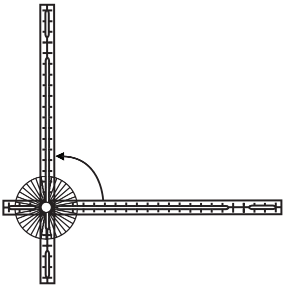


आकृति 1 **शून्य कोण**

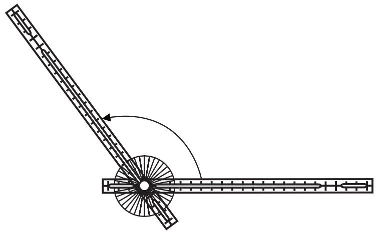
4. दूसरी पट्टी को (वामावर्त दिशा में) घुमाकर विभिन्न मापों के कोण (आकृति 1, आकृति 2, आकृति 3, आकृति 4, आकृति 5, आकृति 6 और आकृति 7) बनाने का प्रयास कीजिए।



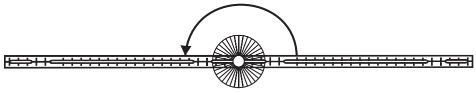
आकृति 2 **न्यून कोण**



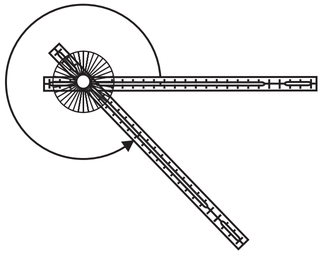
आकृति 3 **समकोण**



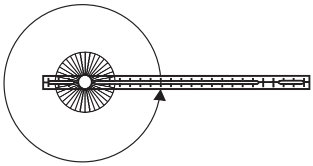
आकृति 4 **अधिक कोण**



आकृति 5 **ऋजु या सरल कोण**



आकृति 6 **प्रतिवर्ती कोण**



आकृति 7 **संपूर्ण कोण**

टिप्पणी ...

1. *सभी कोणों को प्रथम पट्टी से वामावर्त दिशा में मापा जाना है।*
2. *चाँदे के स्केल (पैमाने) के चिह्नों का सावधानीपूर्वक प्रयोग कीजिए*

प्लास्टिक की पट्टियों द्वारा बने विभिन्न कोणों के मापों को चाँदे से प्रेक्षित करने के पश्चात् रिक्त स्थानों को भरिए —

1. समकोण बनता है, जब माप ______________ है।
2. ऋजु कोण बनता है, जब माप ______________ है।
3. संपूर्ण कोण बनता है, जब माप ______________ है।
4. न्यून कोण बनता है, जब माप ______________ है।
5. अधिक कोण बनता है, जब माप ______________ है।
6. प्रतिवर्ती कोण बनता है, जब माप ______________ है।

शून्य डिग्री के अतिरिक्त किसी अन्य डिग्री को प्रारंभिक बिंदु लेते हुए कोणों का मापन—

अब प्रथम पट्टी को चाँदे की 30° अंकित रेखा के अनुदिश लगाइए तथा दूसरी पट्टी को चाँदे की 70° अंकित रेखा के अनुदिश लगाइए।

- इस प्रकार बने कोण की माप क्या है?
- यह किस प्रकार का कोण है?

इस प्रकार बना कोण $70° – 30° = 40°$ माप का एक न्यून कोण है।

इसी प्रकार, दोनों पट्टियों को चाँदे की विभिन्न अंकित रेखाओं के अनुदिश लीजिए तथा फिर निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	प्रथम पट्टी की स्थिति (A)	दूसरी पट्टी की स्थिति (B)	कोण की माप (B–A)	कोण का प्रकार
1.	10°	50°	40°	न्यून कोण
2.	25°	60°	....	....
3.	....	170°	135°	....
4.	50°	200°	....	....
5.	....	115°	....	समकोण
6.	....	230°	180°	....
7.	30°	280°	....	....

अब, प्रथम पट्टी को 40° पर स्थिर कीजिए। निम्नलिखित सारणी को पूरा करने के लिए उन कोणों के माप दीजिए, जिनमें दूसरी पट्टी वामावर्त दिशा में घूम जाएगी—

क्रम सं.	प्रथम पट्टी की स्थिति	दूसरी पट्टी की स्थिति	कोण की माप	कोण का प्रकार
1.	40°	-----	-----	न्यून कोण
2.	40°	------	-----	अधिक कोण
3.	40°	------	------	समकोण
4.	40°	-------	------	ऋजु कोण
5.	40°	------	-------	प्रतिवर्ती कोण

क्रियाकलाप 2

दो समांतर रेखाएँ और एक तिर्यक रेखा

उद्देश्य

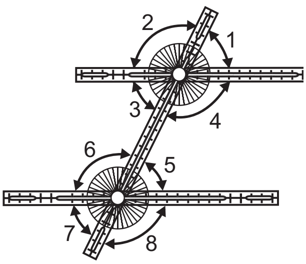
एक तिर्यक रेखा द्वारा दो समांतर रेखाओं के साथ बनाए गए कोणों के विभिन्न युग्मों के संबंधों का सत्यापन करना।

वाँछित सामग्री

तीन प्लास्टिक की पट्टियाँ, दो संपूर्ण चाँदे तथा चूड़ीदार पेंच।

कैसे प्रारंभ करें ?

1. तीन पट्टियों और दो संपूर्ण चाँदों को लीजिए तथा इन्हें चूड़ीदार पेंचों की सहायता से इस प्रकार स्थिर कीजिए कि दो पट्टियाँ परस्पर समांतर रहें और तीसरी पट्टी इनकी तिर्यक रेखा रहे, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

सोचिए...
आप किस प्रकार जाँच करेंगे कि दोनों पट्टियाँ समांतर हैं या नहीं?

2. इस प्रकार बने सभी कोणों, जो संख्याओं 1 से 8 द्वारा अंकित हैं, को मापिए तथा निम्नलिखित सारणियों को पूरा कीजिए—

सारणी A — संगत कोण

क्रम सं.	कोण का नाम	कोण की माप	कोण का नाम	कोण की माप	प्रेक्षण (संबंध)
1.	$\angle 1$	52°	$\angle 5$	52°	बराबर
2.	$\angle 2$	......	$\angle 6$	......	......
3.	$\angle 3$	......	$\angle 7$	......	......
4.	$\angle 4$	......	$\angle 8$	......	......

निष्कर्ष— ....

सारणी B — एकांतर अंत: और बाह्य कोण

क्रम सं.	कोण का नाम	कोण की माप	कोण का नाम	कोण की माप	प्रेक्षण (संबंध)
1.	$\angle 4$	52°	$\angle 5$	52°	बराबर
2.	$\angle 3$	......	$\angle 6$	......	......
3.	$\angle 1$	......	$\angle 7$	......	......
4.	$\angle 2$	......	$\angle 8$	......	......

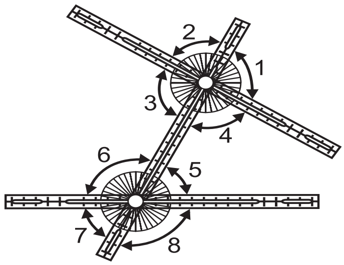
निष्कर्ष— ....

सारणी C — तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण

क्रम सं.	कोण का नाम	कोण की माप	कोण का नाम	कोण की माप	प्रेक्षण (संबंध)
1.	$\angle 4$	128°	$\angle 5$	52°	
2.	$\angle 3$	......	$\angle 6$	......	

निष्कर्ष— ....

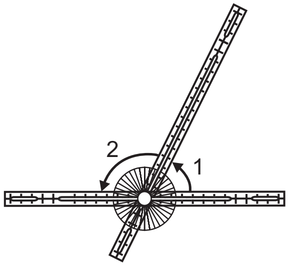
3. अब, इन पट्टियों और दोनों चाँदों को इस प्रकार स्थिर कीजिए (लगाइए) कि दो पट्टियाँ परस्पर समांतर न रहें तथा तीसरी पट्टी इनकी तिर्यक रेखा रहे, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



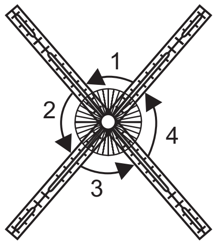
आकृति 2

उपरोक्त क्रियाकलापों की पुनरावृत्ति कीजिए तथा सारणियों A, B और C को पुन: बनाकर भरिए तथा प्रत्येक सारणी के लिए निष्कर्ष लिखिए।

4. आप रैखिक युग्म तथा शीर्षाभिमुख कोणों के गुणों को भी पट्टियों को नीचे दिए अनुसार लगाते हुए देख सकते हैं—



(i) रैखिक युग्म के लिए



(ii) शीर्षाभिमुख कोणों के लिए

आकृति 3

प्रश्न 1 आकृति 3 का प्रयोग करते हुए, रैखिक युग्म तथा शीर्षाभिमुख कोणों के परिणामों का सत्यापन कीजिए।

प्रश्न 2 क्या आप इस क्रियाकलाप को यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा से 'यदि एक सरल रेखा दो सरल रेखाओं पर इस प्रकार गिरती है कि उसके एक ही ओर के दोनों अंत: कोण मिलकर दो समकोणों से कम हों, तो दोनों सरल रेखाएँ, अनिश्चित रूप से बढ़ाई जाने पर उस ओर मिलती हैं जिस ओर कोणों का योग दो समकोण से कम होता है।' सह-संबंधित कर सकते हैं?

क्रियाकलाप 3

त्रिभुज के गुण

उद्देश्य

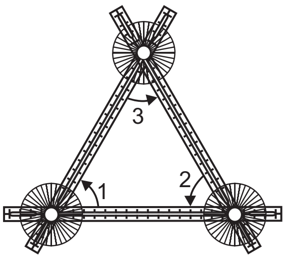
किसी त्रिभुज के गुणों की खोज करना।

वाँछित सामग्री

तीन प्लास्टिक की पट्टियाँ, तीन अर्ध चाँदे या संपूर्ण चाँदे, चूड़ीदार पेंच।

कैसे प्रारंभ करें ?

1. आकृति 1 के अनुसार, पट्टियों को चाँदे सहित लगाइए। यदि आवश्यक हो, तो दो पट्टियों को जोड़ा भी जा सकता है।



आकृति 1

2. पट्टियों को घुमाकर, विभिन्न त्रिभुज बनाइए। साथ ही, कोणों (अंत: तथा एक ही क्रम में लिए बहिष्कोणों सहित) तथा त्रिमुज की भुजाओं को मापिए और उनके गुणों को खोजिए।

त्रिभुज का कोण योग गुण

त्रिभुज के कोणों को परिवर्तित कीजिए तथा उसके कोणों में संबंध ज्ञात करने के लिए उनके मापों को लिखिए—

क्रम सं.	कोण 1	कोण 2	कोण 3	$\angle 1+\angle 2+\angle 3$
1.				
2.				
3.				

निष्कर्ष— ....

बहिष्कोण गुण

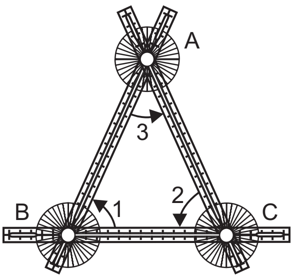
बढ़ाई गई भुजाओं द्वारा त्रिभुज के बने बहिष्कोणों तथा उनके संगत अभिमुख अंत: कोणों को देखिए। संबंध ज्ञात करने के लिए उनके मापों को निम्नलिखित सारणी में लिखिए—

क्रम सं.	बहिष्कोण	अभिमुख अंत: कोण	अभिमुख अत: कोणो का युग
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष— ....

समद्विबाहु त्रिभुज

तीनों पट्टियों को घुमाकर विभिन्न त्रिभुज बनाइए, जिनमें दो भुजाएं लम्बाई में समान हों (आकृति 2) तथा इस प्रकार बने त्रिभुजों की भुजाओं और कोणों को निम्नलिखित सारणी में लिखिए —

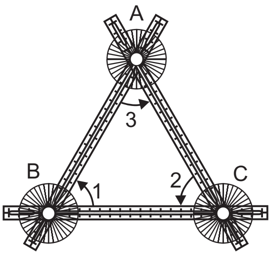


आकृति 2

क्रम सं.	भुजा की लंबाई			कोण की माप			बराबर भुजाएँ	बराबर कोण
	AB	BC	AC	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$		
1.								
2.								
3.								

निष्कर्ष— ....

समबाहु त्रिभुज

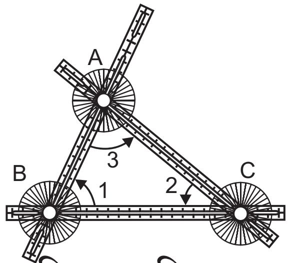


आकृति 3

तीनों पट्टियों को घुमाकर विभिन्न समबाहु त्रिभुज बनाइए जिनमें तीनों भुजाएं लम्बाई में समान हो तथा इस प्रकार बने त्रिभुजों की भुजाओं और कोणों की मापों को निम्नलिखित सारणी में लिखिए—

क्रम सं.	भुजा की लंबाई			कोण की माप		
	AB	BC	AC	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$
1.						
2.						
3.						

निष्कर्ष— ....



विषमबाहु त्रिभुज

आकृति 4

तीनों पट्टियों को घुमाकर विभिन्न विषमबाहु त्रिभुज बनाइए जिनमें तीनों भुजाएं लम्बाई में असमान हो (आकृति 4) तथा इस प्रकार बने त्रिभुजों की भुजाओं और कोणों की मापों को निम्नलिखित सारणी में लिखिए—

क्रम सं.	भुजा की लंबाई			कोण की माप		
	AB	BC	AC	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$
1.						
2.						
3.						

निष्कर्ष— ....

त्रिभुज में बड़ी भुजा का सम्मुख कोण

त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई को इस प्रकार बदलिए कि वह शेष दो भुजाओं से बड़ी हो जाए। भुजाओं और कोणों को मापिए तथा इन्हें एक सारणी में लिखिए। इसी प्रकार, एक कोण को इस प्रकार बदलिए कि वह शेष दो कोणों से बड़ा हो जाए। अब भुजाओं और कोणों को मापकर एक सारणी में लिखिए। कोण और उसकी सम्मुख भुजा के बीच संबंध की खोज कीजिए—

क्रम सं.	भुजा की लंबाई			कोण की माप			सबसे बड़ी भुजा	सबसे बड़ी भुजा
	AB	BC	AC	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$		
1.								
2.								
3.								

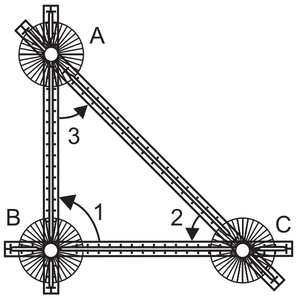
निष्कर्ष— ....

त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं का योग

विभिन्न लंबाइयों की भुजाओं वाले त्रिभुज बनाइए तथा उनके मापनों को एक सारणी में लिखिए। दो भुजाओं के योग का तीसरी भुजा के साथ संबंध खोजिए।

क्रम सं.	भुजा की लंबाई			AB+BC	BC+AC	AB+AC
	AB	BC	AC			
1.						
2.						
3.						

निष्कर्ष— ....



आकृति 5

सोचिए...
क्या भुजाओं के वर्गों में कोई संबंध है?

समकोण त्रिभुज

तीनों पट्टियों को घुमाकर विभिन्न समकोण त्रिभुज बनाइए (आकृति 5) तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	भुजा की लंबाई			कोण की माप			भुजाओं की लंबाइयों के वर्ग			सबसे बड़ी भुजा
	AB	BC	AC	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	AB^2	BC^2	AC^2	
1.										
2.										
3.										

क्रियाकलाप 4

निष्कर्ष— ....

मध्य-बिंदु प्रमेय

उद्देश्य

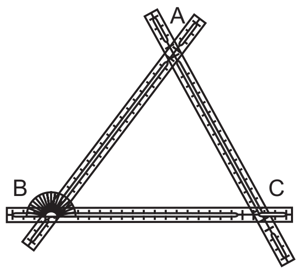
मध्य-बिंदु प्रमेय "किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर और लम्बाई में उसका आधा होता है" का सत्यापन करना।

वाँछित सामग्री

चार प्लास्टिक की पट्टियाँ, दो अर्ध चाँदे, चूड़ीदार पेंच।

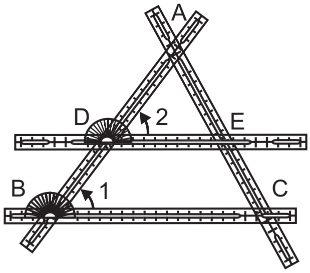
कैसे प्रारंभ करें ?

1. तीन पट्टियों को स्थिर करते हुए एक त्रिभुज ABC बनाइए तथा इसके एक शीर्ष (मान लीजिए B) पर एक अर्ध चाँदा लगाइए जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. इस त्रिभुज की एक भुजा AB के मध्य-बिंदु, मान लीजिए D पर, एक अन्य पट्टी एक अर्ध चाँदे सहित लगाइए।
3. अब इस पट्टी को इस प्रकार समायोजित कीजिए कि यह एक अन्य भुजा AC के मध्य-बिंदु E से होकर जाए जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

4. अब, दोनों चाँदों द्वारा दर्शाए कोणों को मापिए।
5. साथ ही भुजा BC और रेखाखंड DE की लंबाइयों को मापिए।
6. पट्टियों की सहायता से विभिन्न अभिविन्यासों में विभिन्न प्रकार के त्रिभुज बनाकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए और निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	$\angle 1$	$\angle 2$	क्या $\angle 1 = \angle 2$ है?	BC की लंबाई	DE की लंबाई	क्या $DE = \frac{1}{2} BC$ है?
1.						
2.						
3.						

निष्कर्ष— ....

क्योंकि $\angle 1 = \angle 2$ है, इसलिए DE..... BC तथा DE = $\frac{1}{2}$ ×.....है।

क्रियाकलाप 5

मध्य-बिंदु प्रमेय का विलोम

उद्देश्य

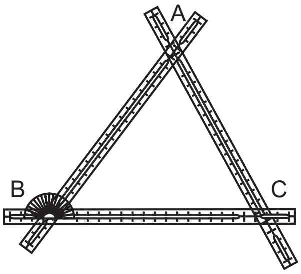
सत्यापन करना कि किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

वाँछित सामग्री

चार प्लास्टिक की पट्टियाँ, दो अर्ध चाँदा, चूड़ीदार पेंच।

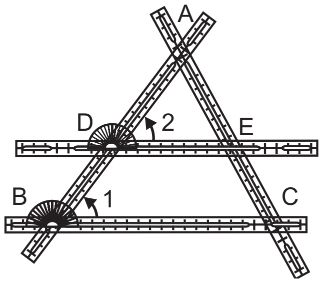
कैसे प्रारंभ करें ?

1. एक त्रिभुज ABC बनाने के लिए तीन पट्टियों को स्थिर कीजिए तथा एक शीर्ष B, मान लीजिए। B पर एक अर्ध चाँदा लगाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. इस त्रिभुज की एक भुजा AB के मध्य-बिंदु D पर एक अन्य पट्टी एक अर्ध चाँदे सहित इस प्रकार लगाइए कि वह तीसरी भुजा AC को E पर प्रतिच्छेद करे।
3. अब इस पट्टी को इस प्रकार समायोजित कीजिए कि दोनों चाँदों पर दर्शाए गए कोण समान हों, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

4. ये संगत कोण हैं। अत: DE भुजा BC के समांतर है।
5. अब AE और EC की लंबाइयों को मापिए।
6. विभिन्न प्रकार के त्रिभुज बनाकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	AE	EC	क्या AE = EC है?
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष— ....

समांतर

क्रियाकलाप 6

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय

उद्देश्य

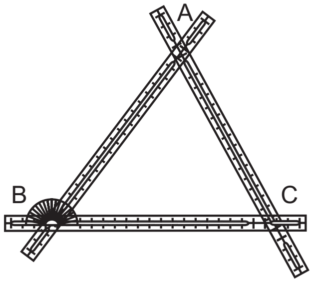
आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय ''यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो वह उन्हें एक ही अनुपात में विभाजित करती है'' का सत्यापन करना।

वाँछित सामग्री

चार प्लास्टिक की पट्टियाँ, दो अर्ध चाँदे, चूड़ीदार पेंच।

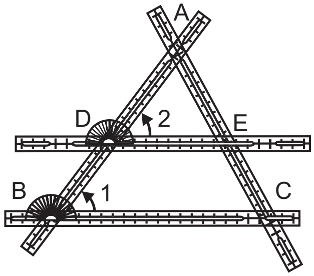
कैसे प्रारंभ करें ?

1. एक त्रिभुज ABC बनाने के लिए तीन पट्टियों को स्थिर कीजिए तथा एक शीर्ष मान लीजिए B, पर एक अर्ध चाँदा लगाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. त्रिभुज ABC की एक भुजा पर एक सुविधाजनक बिंदु D लीजिए तथा D पर अर्ध चाँदे सहित एक अन्य पट्टी इस प्रकार लगाइए कि AD और DB का अनुपात सरलता से परिकलित किया जा सके।
3. अब इस पट्टी को इस प्रकार समायोजित कीजिए कि दोनों चाँदों पर कोण बराबर हो जाए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

4. अब AD, DB, AE और EC की लंबाइयों को मापिए।
5. विभिन्न प्रकार के त्रिभुज बनाकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखितलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	AD	DB	AD:DB	AE	EC	AE:EC	क्या AD:DB=AE:EC है?
1.							
2.							
3.							

निष्कर्ष— ....

क्योंकि $\angle 1 = \angle 2$ है,

अत: DE||....... है।

यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो वह उन्हें..... विभाजित करती है।

क्रियाकलाप 7

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय का विलोम

उद्देश्य

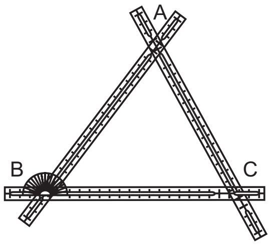
सत्यापन करना कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

वाँछित सामग्री

चार प्लास्टिक की पट्टियाँ, दो अर्ध चाँदे, चूड़ीदार पेंच।

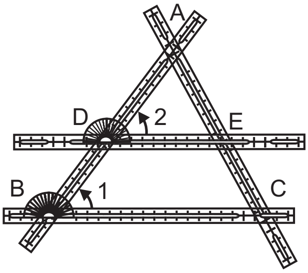
कैसे प्रारंभ करें ?

1. एक त्रिभुज ABC बनाने के लिए तीन पट्टियों को स्थिर कीजिए तथा एक शीर्ष, मान लीजिए B, पर एक अर्ध चाँदा लगाइए जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. भुजा AB पर एक सुविधाजनक बिंदु D लीजिए और एक अन्य पट्टी को भुजा AC के बिंदु पर E इस प्रकार लगाइए कि AD:DB और AE:EC समान रहें। साथ ही, D पर एक अर्ध चाँदा भी लगाइए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. अब, दोनों अर्ध चाँदों द्वारा B और D दर्शाए गए कोणों को मापिए।
4. विभिन्न प्रकार के त्रिभुज बनाकर या एक त्रिभुज ABC को स्थिर रखते हुए तथा इस त्रिभुज की दोनों भुजाओं AB और AC पर पट्टी की स्थितियों को इस प्रकार बदलते हुए कि अनुपात AD : DB = AE : EC हो, उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए।
5. अब, निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	$\angle 1$	$\angle 2$	क्या $\angle 1 = \angle 2$ है?
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष— ....

क्योंकि $\angle 1 = \angle 2$ है, अत: DE $\parallel$ ......है।

क्रियाकलाप 8

चतुर्भुज के गुण

उद्देश्य

विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के गुणों की खोज करना।

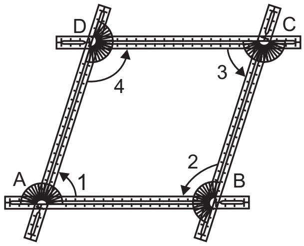
वाँछित सामग्री

छः प्लास्टिक की पट्टियाँ, चार अर्ध चाँदे, एक संपूर्ण चाँदा तथा चूड़ीदार पेंच।

कैसे प्रारंभ करें ?

एक चतुर्भुज का कोण योग गुण

1. चारों अर्ध चाँदों सहित चार पट्टियों को चूड़ीदार पेंचों की सहायता से स्थिर कीजिए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

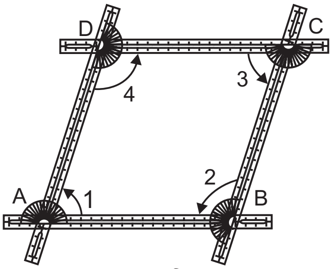
2. इसी प्रकार पट्टियों को घुमाकर विभिन्न चतुर्भुज बनाइए और इस प्रकार बने प्रत्येक चतुर्भुज के कोणों को मापिए तथा इन मापों को नीचे दी हुई सारणी में लिखिए—

क्रम सं.	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$	$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4$
1.					
2.					
3.					

निष्कर्ष— ....

एक समांतर चतुर्भुज के गुण

1. आकृति 2 में दर्शाए अनुसार चार पट्टियों को घुमाकर विभिन्न समांतर चतुर्भुज बनाइए तथा प्रत्येक समांतर चतुर्भुज के कोणों और भुजाओं की लंबाइयों को मापिए।



आकृति 2

अब, निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	भुजाओं की लंबाइयाँ				कोणों की माप				$\angle 1 + \angle 2$	$\angle 1 + \angle 4$	$\angle 3 + \angle 4$	$\angle 2 + \angle 3$
	AB	BC	DC	AD	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$				
1.												
2.												
3.												

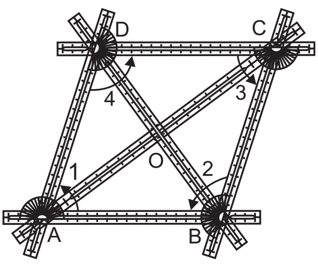
निष्कर्ष—

(i) सम्मुख कोण .... हैं।

(ii) सम्मुख भुजाएँ .... हैं।

(iii) आसन्न कोण .... हैं।

2. दो और पट्टियाँ लीजिए तथा उन्हें विकर्णों AC और BD के रूप में आकृति 3 में दर्शाए अनुसार लगाइए।



आकृति 3

3. इसी प्रकार, विकर्णों के साथ विभिन्न समांतर चतुर्भुज बनाइए तथा प्रत्येक समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदु O से शीर्षों की दूरियों को निम्नलिखित सारणी में लिखिए—

क्रम सं	कोण की माप				विकर्ण के अनुदिश लंबाई					
	∠1	∠2	∠3	∠4	AC	AO	OC	BD	BO	OD
1.										
2.										
3.										

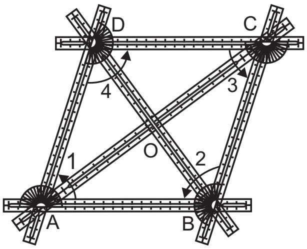
निष्कर्ष—

(i) विकर्ण ....

(ii) विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु ....

एक समचतुर्भुज के गुण

1. चार पट्टियों को घुमाकर विभिन्न समचतुर्भुज बनाइए तथा इस प्रकार बने प्रत्येक समचतुर्भुज के कोणों और भुजाओं की लंबाइयों को मापिए, जैसा कि आकृति 4 में दर्शाया गया है।



आकृति 4

अब निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	∠1	∠2	∠3	∠4	AB	BC	CD	DA
1.								
2.								
3.								

निष्कर्ष—

(i) सम्मुख कोण ....

(ii) सम्मुख भुजाएँ ....

2. दो और पट्टियाँ लीजिए तथा उन्हें विकर्णों AC और BD के रूप में, आकृति 4 में दर्शाए अनुसार लगाइए। अब विकर्णों द्वारा बने कोणों को मापिए तथा शीर्षों की विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदु O से दूरियाँ भी मापिए। इसके बाद निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	विकर्ण की लंबाई		बिंदु O से दूरी				कोणों के माप			
	BD	AC	AO	OC	BO	OD	∠BOA	∠BOC	∠DOC	∠AOD
1.										
2.										
3.										

निष्कर्ष—

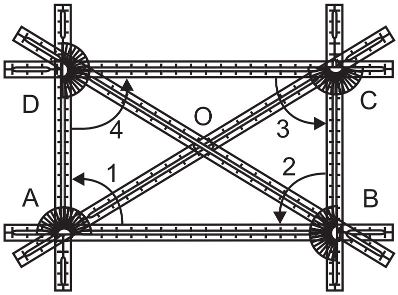
(i) विकर्ण ....

(ii) विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु ....

(iii) विकर्णों के बीच के कोण ....

एक आयत के गुण

1. चार पट्टियों को घुमाकर विभिन्न आयत बनाइए तथा इस प्रकार बने आयत ABCD में दो और पट्टियाँ विकर्णों AC और BD के रूप में लगाइए, जैसा कि आकृति 5 में दर्शाया गया है।



आकृति 5

2. अब इस प्रकार बने आयत के कोणों, भुजाओं और विकर्णों को मापिए। साथ ही, शीर्षों की विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदु O से दूरियों तथा प्रत्येक आयत के विकर्णों द्वारा बने कोणों को मापिए और निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	भुजा की लंबाई				कोण की माप				विकर्ण के अनुदिश लंबाई					
	AB	**BC**	**CD**	**AD**	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$	**AC**	**AO**	**OC**	**BD**	**BO**	**OD**
1.														
2.														
3.														

निष्कर्ष—

(i) सम्मुख भुजाएँ ....

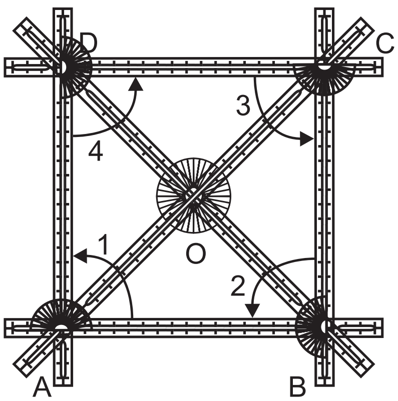
(ii) कोण ....

(iii) विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु ....

(iv) विकर्णों की लंबाइयाँ ....

एक वर्ग के गुण

चार पट्टियों को घुमाकर विभिन्न वर्ग बनाइए (आकृति 6) तथा उसके कोण, भुजाओं और विभिन्न रेखाखंडों को मापिए और निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए -



आकृति 6

क्रम सं	कोण की माप				विकर्ण के अनुदिश लंबाई						कोणों के मापन			
	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$	AC	AO	OC	BD	BO	OD	$\angle AOB$	$\angle BOC$	$\angle COD$	$\angle DOA$
1.														
2.														
3.														

निष्कर्ष—

(i) भुजाएँ ....

(ii) विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु ....

(iii) कोण ....

(iv) विकर्णों के बीच कोण ....

(v) विकर्णों की लंबाइयाँ...

क्रियाकलाप 9

दिए हुए चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं द्वारा बना चतुर्भुज

उद्देश्य

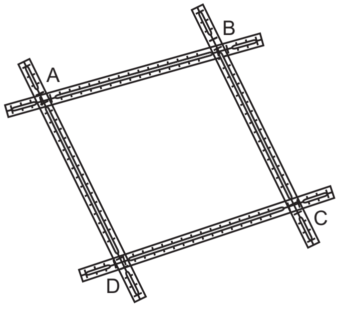
इसका सत्यापन करना कि एक चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को एक ही क्रम में जोड़ने पर एक समांतर चतुर्भुज बनता है।

वाँछित सामग्री

आठ प्लास्टिक की पट्टियाँ, दो अर्ध चाँदे, चूड़ीदार पेंच।

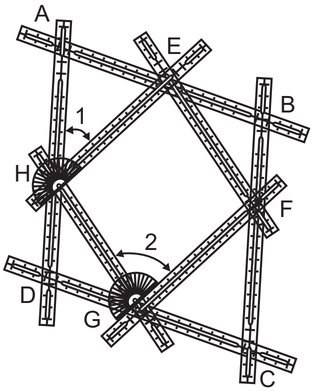
कैसे प्रारंभ करें ?

1. चूड़ीदार पेंचों की सहायता से, चार पट्टियों को एक चतुर्भुज ABCD बनाने के लिए स्थिर कीजिए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. शेष चारों पट्टियों को चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं E,F,G और H पर इस प्रकार लगाइए कि वे एक चतुर्भुज बनाएँ, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. अब $\angle 1$ और $\angle 2$ तथा भुजाओं HE और GF की लंबाइयों को मापिए।
4. विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज बनाकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	$\angle 1$	$\angle 2$	क्या $\angle 1 = \angle 2$ हैं?	HE	GF	क्या HE = GF है?
1.						
2.						
3.						

निष्कर्ष— ....

क्योंकि $\angle 1 = \angle 2$ हैं, अत: HE$\|$.......है।

साथ ही, HE और GF ....हैं।

अत: चतुर्भुज EFGH एक ....है।

क्रियाकलाप 10

जियोबोर्ड द्वारा क्षेत्रफल की खोज करना

उद्देश्य

जियोबोर्ड पर विभिन्न आकार बनाना तथा उनके क्षेत्रफलों की खोज करना।

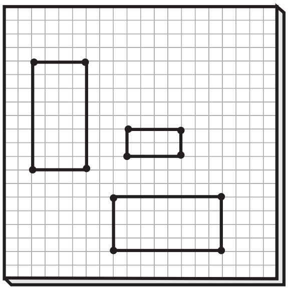
वाँछित सामग्री

जियोबोर्ड, रबर बैंड, जियोबोर्ड की पिन।

कैसे प्रारंभ करें ?

आयत का क्षेत्रफल

1. जियोबोर्ड पिनों और रबर बैंडों का प्रयोग करते हुए जियोबोर्ड पर विभिन्न आयतों के आकार बनाइए जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

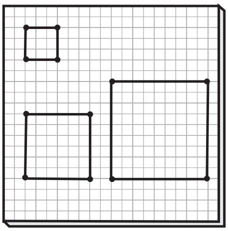
2. अब प्रत्येक आयत के अंदर घिरे इकाई वर्गों की संख्या को गिनिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	आयत में इकाई वर्गों की कुल संख्या	आयत की लंबाई	आयत की चौड़ाई	लंबाई×चौड़ाई
1.				
2.				
3.				

निष्कर्ष— आयत का क्षेत्रफल...............होता है।

वर्ग का क्षेत्रफल

1. जियोबोर्ड पिनों और रबर बैंडों का प्रयोग करते हुए, जियोबोर्ड पर विभिन्न वर्गों के आकार बनाइए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

2. प्रत्येक वर्ग के अंदर घिरे इकाई वर्गों की संख्या को गिनिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

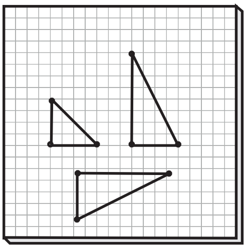
क्रम सं.	वर्ग में इकाई वर्गों की कुल संख्या	वर्ग की भुजा	भुजा × भुजा
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष—

वर्ग का क्षेत्रफल.......................होता है।

समकोण त्रिभुज का के क्षेत्रफल

1. जियोबोर्ड पिनों और रबर बैंडों की सहायता से जियोबोर्ड पर विभिन्न समकोण त्रिभुजों के आकार बनाइए, जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है।



आकृति 3

2. अब किसी भी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, उसके अंदर घिरे इकाई वर्गों को गिनने के नियम का प्रयोग करते हुए, प्रत्येक समकोण त्रिभुज के अंदर घिरे इकाई वर्गों की संख्या को गिनिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	समकोण त्रिभुज में इकाई वर्गों की कुल संख्या	ऊँचाई (h)	आधार (b)	$\frac{1}{2}\times(b\times h)$
1.				
2.				
3.				

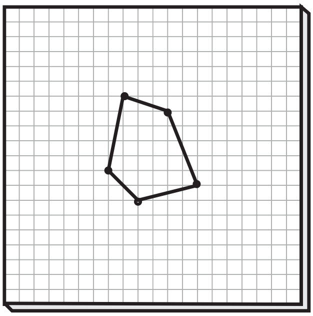
निष्कर्ष—

एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल...............होता है।

अनियमित आकृतियों के क्षेत्रफल

1. जियोबोर्ड पिनों और रबर बैंडों की सहायता से, जियोबोर्ड पर एक अनियमित आकृति बनाइए, जैसा कि आकृति 4 में दर्शाया गया है।

आकृति 4



2. इस आकृति का क्षेत्रफल इसके अंदर घिरे इकाई वर्गों की संख्या को निम्नलिखित प्रकार से गिनकर ज्ञात कीजिए—
   (क) इस आकृति द्वारा घिरे आधे से अधिक वर्ग को गिनिए तथा इसका क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई लीजिए।
   (ख) इस आकृति द्वारा घिरे एक पूरे इकाई वर्ग को 1 गिनिए तथा इसका क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई लीजिए।
   (ग) इस आकृति द्वारा घिरे आधे इकाई वर्ग को $\frac{1}{2}$ गिनिए तथा इसका क्षेत्रफल $\frac{1}{2}$

वर्ग इकाई लीजिए।

(घ) इस आकृति द्वारा आधे से कम इकाई वर्गों को छोड़ दीजिए।

3. उपरोक्त आकृति 4 में 17 पूरे इकाई वर्ग, 4 आधे से अधिक इकाई वर्ग तथा 5 आधे इकाई वर्ग हैं।
4. जियोबोर्ड पर कुछ और अनियमित आकृतियाँ बनाइए तथा उनके क्षेत्रफलों को ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

निष्कर्ष—

आकृति का क्षेत्रफल........है।

क्रियाकलाप 11

समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल

उद्देश्य

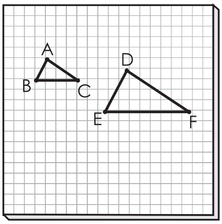
इसका सत्यापन करना कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

वाँछित सामग्री

जियोबोर्ड, रबर बैंड, जियोबोर्ड पिन।

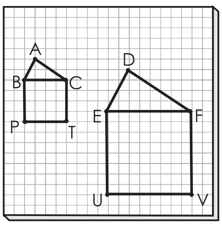
कैसे प्रारंभ करें ?

1. जियोबोर्ड पर उपयुक्त स्थानों पर 6 जियोबोर्ड पिन लगाकर रबर बैंडों की सहायता से दो समरूप त्रिभुज ABC और DEF बनाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. रबर बैंड और जियोबोर्ड पिनों का प्रयोग करते हुए, भुजाओं BC और EF पर वर्ग बनाइए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. ऊपर बने दोनों त्रिभुजों और दोनों वर्गों के क्षेत्रफल पहले क्रियाकलाप 10 में दी हुई इकाई वर्गों को गिनने की विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।
4. साथ ही, भुजाओं BC और EF की लंबाइयाँ भी ज्ञात कीजिए।
5. जियोबोर्ड पर, जियोबोर्ड पिनों की स्थितियों को उपयुक्त रूप से बदलते हुए, समरूप त्रिभुजों के विभिन्न युग्म बनाकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)}$	BC पर बने वर्ग का क्षेत्रफल $(BC)^2$	EF पर बने वर्ग का क्षेत्रफल $(EF)^2$	क्या $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(DEF)} = \frac{(BC)^2}{(EF)^2}$ है?
1.				
2.				
3.				

निष्कर्ष— ....

क्रियाकलाप 12

माध्यिका और त्रिभुज का क्षेत्रफल

उद्देश्य

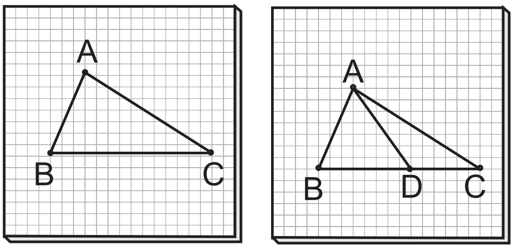
सत्यापन करना कि किसी त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।

वाँछित सामग्री

जियोबोर्ड, रबर बैंड, जियोबोर्ड पिन।

कैसे प्रारंभ करें ?

1. जियोबोर्ड पर तीन पिनों को लगाइए तथा एक रबर बैंड का प्रयोग करते हुए ΔABC इस प्रकार बनाइए कि आधार BC की लंबाई (आकृति 1) में इकाइयों की संख्या सम हो।



आकृति 1

2. BC के मध्य-बिंदु, मान लीजिए D को, A से रबर बैंड की सहायता से जोड़कर माध्यिका AD बनाइए।
3. पहले क्रियाकलाप 10 में दी गई इकाई वर्गों की संख्या गिनने की विधि द्वारा त्रिभुज ADC और त्रिभुज ADB के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. जियोबोर्ड पिनों की स्थितियों को बदलकर, विभिन्न त्रिभुज बनाते हुए, उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	**ar ($\triangle$ABD)**	**ar ($\triangle$ACD)**	**क्या ar ($\triangle$ABD) = ar ($\triangle$ACD) है?**
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष—

किसी त्रिभुज की माध्यिका उसे दो ---------- त्रिभुजों में विभाजित करती है।

क्रियाकलाप 13

एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बनी आकृतियाँ

उद्देश्य

जियोबोर्ड पर निम्नलिखितलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाली विभिन्न आकृतियाँ बनाना—

1. एक ही आधार पर स्थित आकृतियाँ।
2. एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित आकृतियाँ परंतु एक ही आधार पर स्थित न हों।
3. एक ही आधार तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित आकृतियाँ।

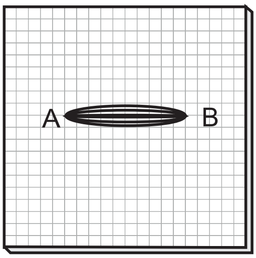
वाँछित सामग्री

जियोबोर्ड, रबर बैंड, जियोबोर्ड पिन।

कैसे प्रारंभ करें ?

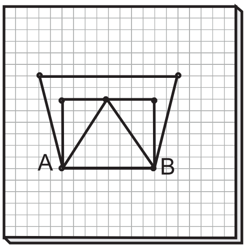
एक ही आधार पर स्थित आकृतियाँ

1. एक जियोबोर्ड पर दो विभिन्न बिंदुओं A और B पर दो जियोपिन लगाइए तथा इन दोनों जियोपिनों के बीच में तीन अलग-अलग रंगों के रबर बैंड आकृति 1 में दर्शाए अनुसार लगाइए।



आकृति 1

2. अब इन तीनों रबर बैंडों से, उपयुक्त स्थानों पर जियोपिन लगाकर, तीन विभिन्न आकृतियाँ एक त्रिभुज, एक आयत और एक समलंब चतुर्भुज बनाइए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।

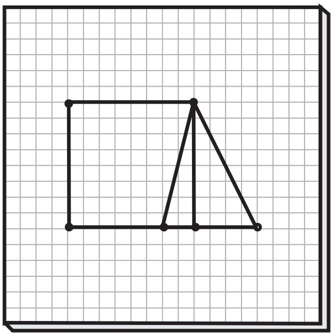


आकृति 2

उपरोक्त आकृति 2 में बनी सभी आकृतियाँ एक ही आधार AB पर स्थित हैं।

एक ही समानांतर रेखाओं के बीच स्थित आकृतियाँ परंतु एक ही आधार पर स्थित नहीं

1. एक ही रेखा में चार जियोबोर्ड पिनों को उपयुक्त रूप से लगाइए। अब जियोबोर्ड पर इस रेखा के समांतर एक रेखा पर दो जियोबोर्ड पिन लगाइए।
2. तीन रबर बैंड लीजिए तथा इनसे तीन विभिन्न आकृतियाँ वर्ग, त्रिभुज और समलंब चतुर्भुज इस प्रकार बनाइए कि ये एक ही समानांतर रेखाओं के बीच में स्थित हों, परंतु एक ही आधार पर स्थित न हों, जैसा कि नीचे आकृति 3 में दर्शाया गया है—

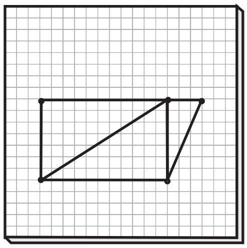


आकृति 3

एक ही आधार तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित आकृतियाँ

1. जियोबोर्ड पर दो जियोपिन दो बिंदुओं पर लगाइए तथा इन दोनों पिनों के बीच में अलग-अलग रंगों के तीन रबर बैंड लगाइए।

2. अब इन रबर बैंडों से तीन विभिन्न आकृतियाँ त्रिभुज, आयत और समलंब चतुर्भुज इस प्रकार बनाइए कि वे एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच में स्थित हों, जैसा कि आकृति 4 में दर्शाया गया है।



आकृति 4

3. जियोबोर्ड पिनों और रबर बैंडों का प्रयोग करते हुए उपरोक्त तीनों प्रतिबंधों में से किसी एक प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाली विभिन्न आकृतियाँ बनाकर उपरोक्त क्रियाकलापों की पुनरावृत्ति कीजिए।

क्रियाकलाप 14

एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज

उद्देश्य

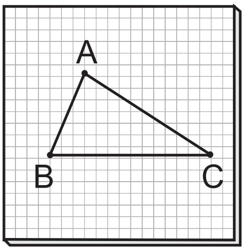
सत्यापन करना कि एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

वाँछित सामग्री

जियोबोर्ड, रबर बैंड, जियोबोर्ड पिन।

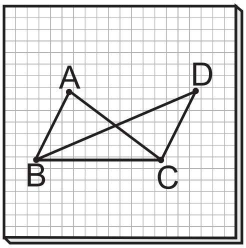
कैसे प्रारंभ करें ?

1. जियोबोर्ड पर जियोपिन लगाकर, रबर बैंड का प्रयोग करते हुए एक ΔABC बनाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. एक अन्य ΔDBC बनाने के लिए जियोबोर्ड पर कुछ और जियोपिन (अलग रंग का रबर बैंड लीजिए) उपयुक्त स्थानों पर इस प्रकार लगाइए कि दोनों त्रिभुज एक ही आधार पर रहें तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. पहले क्रियाकलाप 10 में दी गई आकृतियों के अंदर घिरे इकाई वर्गों की संख्या गिनने की विधि द्वारा दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. जियोबोर्ड पिनों की स्थितियों को उपयुक्त रूप से बदलते हुए, एक ही आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच त्रिभुजों के विभिन्न युग्म बनाकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	ar (ΔABC)	ar (ΔDBC)	क्या ar (ΔABC)=ar (ΔDBC) है?
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष— ....

एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज.....होते हैं।

क्रियाकलाप 15

समांतर रेखाओं के बीच एक ही आधार पर बने समांतर चतुर्भुज

उद्देश्य

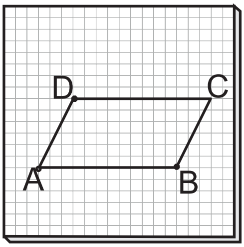
सत्यापन करना कि एक ही आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

वाँछित सामग्री

जियोबोर्ड, रबर बैंड, जियोबोर्ड पिन।

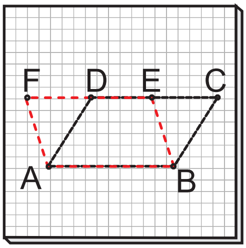
कैसे प्रारंभ करें ?

1. जियोबोर्ड पर, रबर बैंड का प्रयोग करते हुए समांतर चतुर्भुज ABCD बनाने के लिए जियोपिन लगाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. जियोबोर्ड पर एक अन्य समांतर चतुर्भुज ABEF बनाने के लिए (अलग रंग का रबर बैंड प्रयोग कीजिए) उपयुक्त स्थानों पर कुछ और जियोपिन इस प्रकार लगाइए कि दोनों समांतर चतुर्भुज एक ही आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. जिस तरह पहले क्रियाकलाप 10 में घेरे गए वर्गों की संख्या गिनने की विधि अपनाई थी, उसी तरह अपनाते हुए दोनों समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. जियोपिनों की स्थितियों को उपयुक्त रूप से बदलते हुए समांतर चतुर्भुजों के विभिन्न युग्म बनाकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	**समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल**	**समांतर चतुर्भुज ABEF का क्षेत्रफल**	**क्या ar (ABCD) = ar (ABEF) है?**
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष— ....

एक ही आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज......होते हैं।

क्रियाकलाप 16

एक ही आधार पर समांतर रेखाओं के बीच बना त्रिभुज और समांतर चतुर्भुज

उद्देश्य

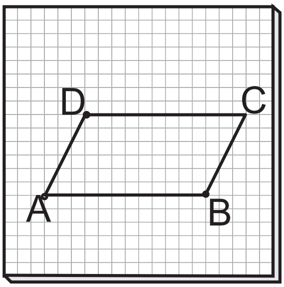
सत्यापन करना ही एक कि आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

वाँछित सामग्री

जियोबोर्ड, रबर बैंड, जियोपिन।

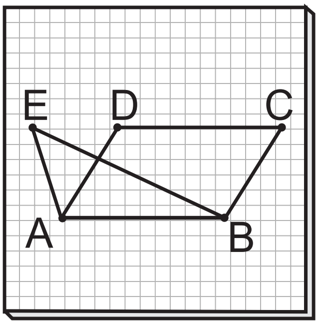
कैसे प्रारंभ करें ?

1. जियोबोर्ड पर, रबर बैंड का प्रयोग करते हुए एक समांतर चतुर्भुज ABCD बनाने के लिए जियोपिन लगाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. जियोबोर्ड पर एक त्रिभुज ABE बनाने के लिए (अलग रंग का रबर बैंड प्रयोग कीजिए।) उपयुक्त स्थानों पर कुछ और जियोपिन इस प्रकार लगाइए कि त्रिभुज और समांतर चतुर्भुज एक ही आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. जिस तरह पहले क्रियाकलाप 10 में घेरे गए इकाई वर्गों की संख्या गिनने की विधि अपनाई गई थी, उसी तरह से समांतर चतुर्भुज ABCD और ΔABE के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. जियोपिनों की स्थितियों को उपयुक्त रूप से बदलते हुए, त्रिभुजों और समांतर चतुर्भुजों के ऐसे ही विभिन्न युग्म बनाकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	$\|$gm ABCD का क्षेत्रफल	ΔABE का क्षेत्रफल	क्या ar (ΔABE) $= \frac{1}{2}$ ar ($\|$gm ABCD) है?
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष— ....

यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल.......के क्षेत्रफल का ......होता है।

क्रियाकलाप 17

विभिन्न क्षेत्रफलों की खोज करना

उद्देश्य

समांतर चतुर्भुज, त्रिभुज और समलंब चतुर्भुज के क्षेत्रफलों की खोज करना।

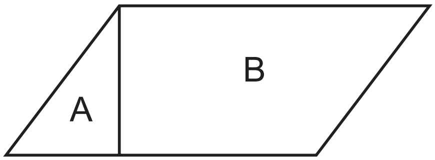
वाँछित सामग्री

विभिन्न आकारों के कट-आउट।

कैसे प्रारंभ करें ?

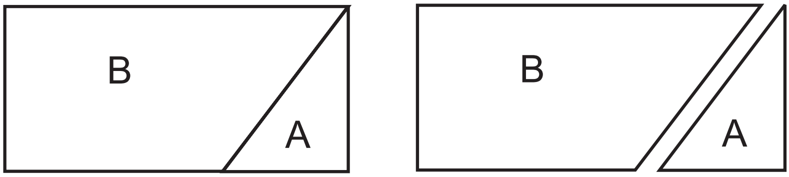
समांतर **चतुर्भुज का क्षेत्रफल**

1. एक त्रिभुजाकार कट-आउट A और एक समलंब कट-आउट B को एक समांतर चतुर्भुज बनाने के लिए एक साथ मिलाकर रखिए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. त्रिभुजाकार कट-आउट को हटाकर समलंब कट-आउट B के दूसरी ओर सटाकर नीचे आकृति 2 में दर्शाए अनुसार रखिए। इससे एक आयत बनेगा।



आकृति 2

निष्कर्ष—

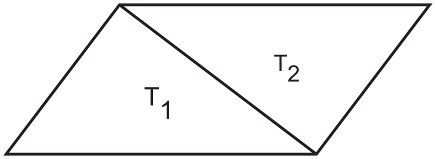
समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ...का क्षेत्रफल

= आयत की लंबाई × ....

= समांतर चतुर्भुज का आधार × ....

त्रिभुज का क्षेत्रफल

1. दो सर्वांगसम त्रिभुजों T_1 और T_2 को मिलाकर एक समांतर चतुर्भुज बनाने के लिए आकृति 3 में दर्शाए अनुसार रखिए।

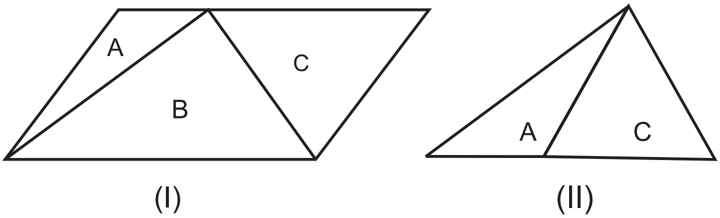


आकृति 3

निष्कर्ष—

त्रिभुज (T_1 या T_2) का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$.......का क्षेत्रफल

2. एक समांतर चतुर्भुज तथा तीन त्रिभुजाकार टुकड़े A, B और C ऐसे लीजिए कि ये समांतर चतुर्भुज को ठीक-ठीक (पूर्णतया) ढक लें, जैसा कि आकृति 4(I) में दर्शाया गया है।



आकृति 4

3. त्रिभुजाकार टुकड़ों A और C को मिलाकर रखिए। ये त्रिभुजाकार टुकड़े B को पूर्णतया ढक लेंगे, जैसा कि आकृति 4 (II) में दर्शाया गया है।

निष्कर्ष—

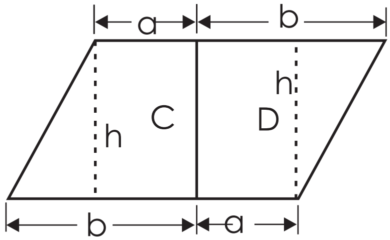
B का क्षेत्रफल = A का क्षेत्रफल + C का क्षेत्रफल

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 2 × B का क्षेत्रफल

B का क्षेत्रफल = ...

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

1. ऊँचाई h और समांतर भुजाओं a और b वाले दो सर्वांगसम समलंबों के कट-आउट C और D लीजिए।
2. इन कट-आउटों को मिलाकर एक समांतर चतुर्भुज बनाइए, जैसा कि आकृति 5 में नीचे दर्शाया गया है:



आकृति 5

निष्कर्ष—

समलंब C का क्षेत्रफ़ल	= समलंब D का क्षेत्रफल
समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल	= — का क्षेत्रफल + — का क्षेत्रफल
समलंब का क्षेत्रफल	$= \frac{1}{2} \times$— का क्षेत्रफल
	$= \frac{1}{2}\ (a+b) \times$——

टिप्पणी

विभिन्न मापों के त्रिभुजों, समलंबों और समांतर चतुर्भुजों के उपयुक्त कट-आउटों का प्रयोग करते हुए इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति की जा सकती है तथा विद्यार्थियों को समांतर चतुर्भुजों, समलंबों और त्रिभुजों के कट-आउट बनाने के िलए उत्साहित किया जा सकता है ताकि वे विभिन्न आकारों के क्षेत्रफलों में अंर्तसंबंधो की खोज करें।

क्रियाकलाप 18

पाइथागोरस प्रमेय

उद्देश्य

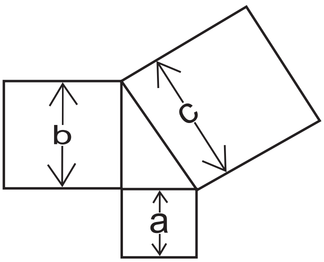
पाइथागोरस प्रमेयका सत्यापन करना अर्थात् "एक समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बना वर्ग अन्य दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है"।

वाँछित सामग्री

भुजाओं a, b और c वाले समकोण त्रिभुजों के कट-आउट। भुजाओं a, b और c वाले वर्गों के कट-आउट।

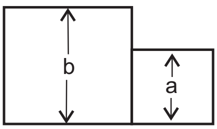
कैसे प्रारंभ करें ?

1. भुजाओं a, b और c वाले तीनों वर्गों तथा समकोण त्रिभुज के कट-आउटों को आकृति 1 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



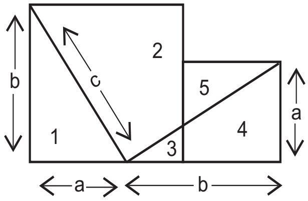
आकृति 1

2. भुजाओं a और b वाले वर्गों के कट-आउटों को आकृति 2 में दर्शाए अनुसार रखिए।



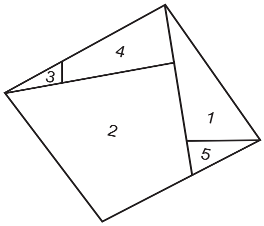
आकृति 2

3. भुजा a वाले वर्ग से तीन कट-आउट तथा भुजा b वाले वर्ग से दो कट-आउट (किट में दिए गए हैं), आकृति 2 में भुजाओं a, b और c वाले दो समकोण त्रिभुजों अंकित कर, तैयार किए जाते हैं और फिर इन्हें आकृति 3 में दर्शाए अनुसार रेखाओं के अनुदिश काटा जाता है।



आकृति 3

4. अब इन पाँचों कट-आउटों को भुजा c वाले वर्ग पर पुर्नव्यवस्थित कीजिए, जैसा कि आकृति 4 में दर्शाया गया है। भुजा c वाला वर्ग भुजाओं a और b वाले वर्गों के पाँचों कट-आउटों से ठीक-ठीक ढक जाता है।



आकृति 4

5. चरण 4 से हमें $a^2 + b^2 = c^2$ प्राप्त होता है।

   विभिन्न समकोण त्रिभुज लेकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए।

निष्कर्ष—

भुजाओं a, b और c वाले एक समकोण त्रिभुज में, जहाँ c कर्ण है,

$a^2+b^2=$............होता है।

एक समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग..........होता है।

क्रियाकलाप 19

बीजीय सर्वसमिकाएँ

उद्देश्य

निम्नलिखित सर्वसमिकाओं का सत्यापन करना—

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

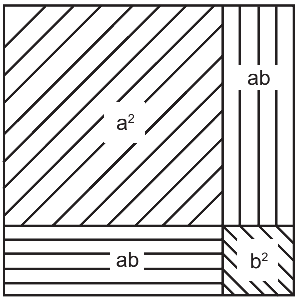
वाँछित सामग्री

भुजाओं a और b इकाइयों वाले वर्गों के कट-आउट, लंबाई a इकाई और चौड़ाई b इकाई वाले दो आयताकार कट-आउट।

कैसे प्रारंभ करें ?

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

1. चारों कट-आउटों को एक मेज पर आकृति 1 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



आकृति 1

2. आकृति 1 में प्राप्त आकार को देखिए। यह भुजा (a + b) इकाई का एक वर्ग है।
3. आकृति 1 में इस प्रकार बने आकार का, वर्ग के क्षेत्रफल के सूत्र— भुजा × भुजा के प्रयोग से क्षेत्रफल

$$(a+b) \times (a+b) = (a+b)^2 \text{ है।}$$

4. साथ ही, इस प्रकार बने आकार का क्षेत्रफल चारों कट-आउटों के क्षेत्रफलों को जोड़कर भी निम्नलिखित रूप से ज्ञात कीजिए—

$$a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

5. चार्ट पेपर, इत्यादि का प्रयोग करते हुए a और b के विभिन्न मानों के साथ वर्ग और आयत बनाते हुए, इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	a	b	a^2	b^2	ab	2ab	$a^2+2ab+b^2$	(a+b)	$(a+b)^2$
1.									
2.									
3.									

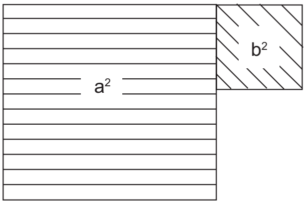
निष्कर्ष—

a और b के सभी मानों के लिए $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ होता है।

कैसे प्रारंभ करें ?

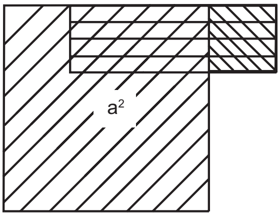
$$\mathbf{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

1. भुजाओं a और b इकाइयों वाले वर्गों के दो कट-आउट लीजिए। इन दोनों कट-आउटों को एक मेज पर आकृति 2 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



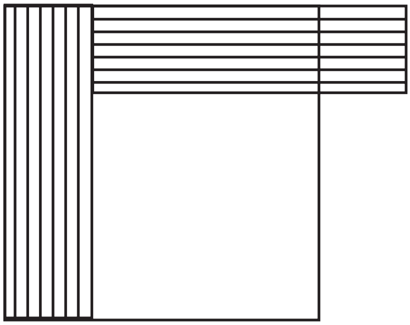
आकृति 2

2. आकृति 2 में प्राप्त आकार पर लंबाई a इकाई और चौड़ाई b इकाई वाले एक आयत के कट-आउट को रखिए, जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है।



आकृति 3

3. उसी विमाओं वाले अन्य आयताकार कट-आउट को आकृति 3 में प्राप्त आकार पर आकृति 4 में दर्शाए अनुसार रखिए।



आकृति 4

4. आकृति 4 में बिना ढके हुए भाग को देखिए। क्या यह एक वर्ग है?
5. इसकी भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए। यह (a–b) इकाई है।
6. आकृति 2 में दिए गए आकार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यह (a^2+b^2) वर्ग इकाई है।
7. आकृति 4 में दिए गए छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यह 2ab वर्ग इकाई है।
8. आकृति 4 में दिए बिना ढके भाग का चरण 2 और चरण 3 से क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यह (a^2+b^2-2ab) वर्ग इकाई है।
9. अब आकृति 4 में बिना ढके भाग का क्षेत्रफल वर्ग के क्षेत्रफल के सूत्र से ज्ञात कीजिए। यह $(a-b)(a-b)=(a-b)^2$ वर्ग इकाई है।
10. a और b के विभिन्न मानों वाले वर्ग और आयत लेकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

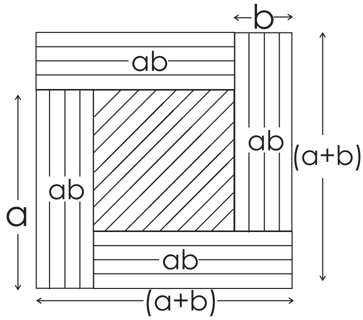
क्रम सं.	a	b	a^2	b^2	ab	2ab	$a^2-2ab+b^2$	(a–b)	$(a-b)^2$
1.									
2.									
3.									

निष्कर्ष—

a और b के सभी मानों के लिए,

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ होता है।

विस्तार सर्वसमिका $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$ के सत्यापन का प्रयास कीजिए।



आकृति 5

क्रियाकलाप 20

बीजीय सर्वसमिकाएँ

उद्देश्य

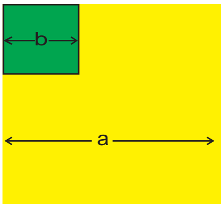
सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ का सत्यापन करना।

वाँछित सामग्री

भुजाओं a और b इकाइयों वाले वर्गों के कट-आउट, समांतर भुजाओं a और b इकाइयों तथा ऊँचाई $(a - b)$ इकाई वाले दो सर्वांगसम समलंबों के कट-आउट।

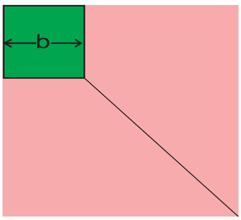
कैसे प्रारंभ करें ?

1. वर्गों के दोनों कट-आउटों को एक मेज पर आकृति 1 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



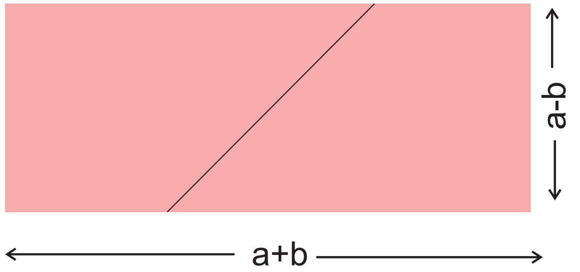
आकृति 1

2. भुजा a इकाई वाले वर्ग के बिना ढके भाग पर, दोनों समलंबों के कट-आउटों को आकृति 2 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए। ये वर्ग के शेष भाग को पूर्णतया ढक लेंगे।



आकृति 2

3. अब समलंबों के कट-आउटों को बाहर निकालकर आकृति 3 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए। ये लंबाई (a+b) इकाई और चौड़ाई (a–b) इकाई का एक आयत बनाते हैं।



आकृति 3

4. आकृति 1 को देखिए तथा बिना ढके भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यह $(a^2–b^2)$ वर्ग इकाई है।
5. आकृति 2 में, दोनों समलंब कट-आउटों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यह $(a^2–b^2)$ वर्ग इकाई है।
6. आकृति 3 को देखिए। यह एक आयत है, जिसकी भुजाएँ (a+b) और (a–b) इकाई है। इसका क्षेत्रफल (a+b) (a–b) वर्ग इकाई है।
7. a और b के विभिन्न मानों वाले वर्ग और समलंब लेकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा फिर निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	a	b	a^2	b^2	a+b	a–b	$a^2–b^2$	(a+b) (a–b)	क्या $a^2–b^2$ = (a+b) (a–b) है?
1.									
2.									
3.									

निष्कर्ष—

a और b के सभी मानों के लिए $a^2–b^2 = (a+b)\ (a–b)$ होता है।

क्रियाकलाप 21

एक द्विघात बहुपद का गुणनखंड

उद्देश्य

Ax^2+Bx+C प्रकार का व्यंजकों के गुणनखंड करना।

- x^2+5x+6
- x^2-x-6
- $2x^2-7x+6$

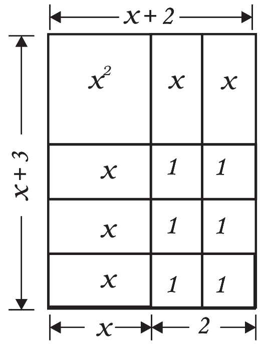
वाँछित सामग्री

नीले (+) और लाल (–) रंगों के बीजीय टाइलें।

कैसे प्रारंभ करें ?

x^2+5x+6 के गुणनखंड करना

1. एक x^2 टाइल, पाँच x टाइल तथा 6 इकाई टाइल लीजिए। इन्हें इस प्रकार व्यवस्थित कीजिए कि एक आयत बने, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. आकृति 1 में प्राप्त आयत की भुजाएँ $(x+3)$ और $(x+2)$ हैं। अत: इस आयत का क्षेत्रफल $(x+2)\ (x+3)$ है।

3. साथ ही आयत द्वारा घिरी सभी टाइलों के क्षेत्रफलों को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है—
$x^2+x+x+x+x+x+1+1+1+1+1+1=x^2+5x+6$

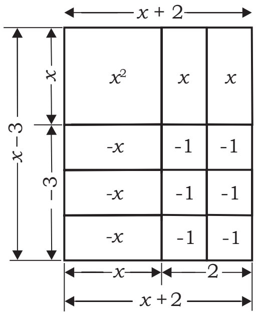
निष्कर्ष—

इससे प्रदर्शित होता है कि

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

x^2-x-6 के गुणनखंड करना

1. एक x^2 टाइल, एक '$-x$' टाइल तथा छः '-1' टाइल लीजिए। इन टाइलों को एक आयत के रूप में व्यवस्थित करने का प्रयास कीजिए।
2. इस स्थिति में, टाइलों से आयत नहीं बनेगा। अब, हम एक x^2 टाइल, तीन '$-x$' टाइल, दो 'x' टाइल तथा छः '-1' टाइल लेंगे, जिनसे आकृति 2 में दर्शाए अनुसार एक आयत बनता है।



आकृति 2

3. आकृति 2 में प्राप्त आयत की भुजाएँ $(x+2)$ और $(x-3)$ हैं। अत:, इस आयत का क्षेत्रफल $(x+2(x-3)$ है।
4. साथ ही, आकृति 2 में दिए आयत से घिरी सभी टाइलों के क्षेत्रफलों को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है—
$x^2+x+x+(-x)+(-x)+(-x)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=x^2-x-6$

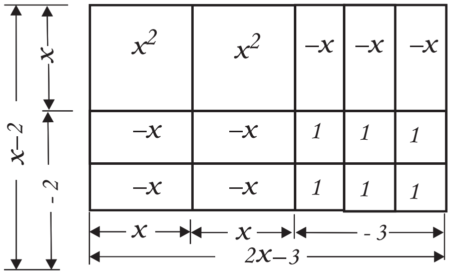
निष्कर्ष—

इससे प्रदर्शित होता है कि

$$x^2-x-6 = (x+2)(x-3)$$

$2x^2–7x+6$ के गुण◌ानखंड करना

1. दो x^2 टाइल, सात '$–x$' टाइल तथा छः इकाई टाइल लीजिए। इन टाइलों को आकृति 3 में दर्शाए अनुसार एक आयत के रूप में व्यवस्थित किजिए।



आकृति 3

2. आकृति 3 में प्राप्त आयत की भुजाएँ $(–2x+3)$ और $(2–x)$ हैं। अत: इस आयत का क्षेत्रफल $(2–x)\ (–2x+3)$ है।
3. साथ ही, आकृति 3 में दिए गए आयत द्वारा घिरी सभी टाइलों के क्षेत्रफलों को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है—

   $x^2+x^2+(-x)+(-x)+(–x)+(–x)+(–x)+(–x)+(–x)+1+1+1+1+1+1=2x^2–7x+6$

निष्कर्ष—

इससे प्रदर्शित होता है

$$2x^2–7x+6=(–2x+3)(2–x)$$

अब, बीजीय टाइलों द्वारा गुणनखंडन की ऐसी ही प्रक्रिया का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

बहुपदों के लिए वाँछित टाइलों की संख्या	x^2	x	$–x$	+1	–1	पहला गुणनखंड	दूसरा गुणनखंड
$x^2+7x+10$ $–2x^2–3x+5$ $2x^2+10x$ $x^2–7x+12$							

क्रियाकलाप 22

एक वृत्त का क्षेत्रफल

उद्देश्य

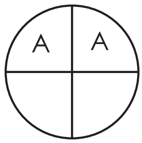
किसी वृत्त के क्षेत्र का निर्धारण करना।

वाँछित सामग्री

वृत्त के कट-आउट तथा इस वृत्त के त्रिज्यखंडों के कुछ कट-आउट।

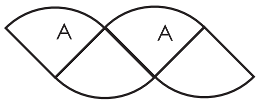
कैसे प्रारंभ करें ?

1. एक वृत्ताकार कट-आउट लीजिए, जो बराबर त्रिज्यखंडों के चार कट-आउटों में विभाजित है, जिनमें से आधे अर्थात् दो पर A लिखा हुआ हो, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



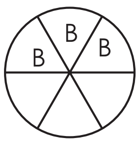
आकृति 1

2. अब इन त्रिज्यखंडों को नीचे आकृति 2 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए—



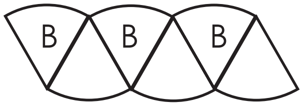
आकृति 2

3. एक वृत्ताकार कट-आउट लीजिए, जो बराबर त्रिज्यखंडों के 6 कट-आउटों में विभाजित हो, जिनमें से आधे अर्थात् 3 पर B लिखा हुआ हो, जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है।



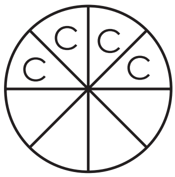
आकृति 3

4. इन त्रिज्यखंडों को नीचे आकृति 4 में दर्शाए आकार के रूप में व्यवस्थित कीजिए—



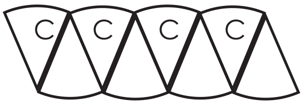
आकृति 4

5. एक वृत्ताकार कट-आउट लीजिए, जो बराबर त्रिज्यखंडों के 8 कट-आउटों में विभाजित हो, जिनमें से आधे अर्थात् 4 पर C लिखा हुआ हो, जैसा कि आकृति 5 में दर्शाया गया है।



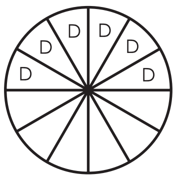
आकृति 5

6. इन त्रिज्यखंडों को नीचे आकृति 6 में दर्शाए आकार के रूप में व्यवस्थित कीजिए—



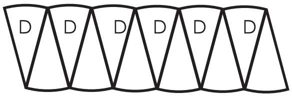
आकृति 6

7. एक वृत्ताकार कट-आउट लीजिए, जो बराबर त्रिज्यखंडों के 12 कट-आउटों में विभाजित हो, जिनमें से आधे अर्थात् 6 पर D लिखा हुआ हो, जैसा कि आकृति 7 में दर्शाया गया है।



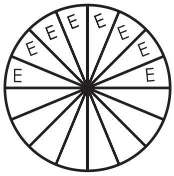
आकृति 7

8. इन त्रिज्यखंडों को नीचे आकृति 8 में दर्शाए आकार के रूप में व्यवस्थित कीजिए—



आकृति 8

9. एक वृत्ताकार कट-आउट लीजिए, जो बराबर त्रिज्यखंडों के 16 कट-आउटों में विभाजित हो, जिनमें से आधे अर्थात् 8 पर E लिखा हुआ हो, जैसा कि आकृति 7 में दर्शाया गया है।



आकृति 9

10. इन त्रिज्यखंडों को नीचे आकृति 10 में दर्शाए आकार के रूप में व्यवस्थित कीजिए—

आकृति 10

11. उपरोक्त सभी आकृतियों में आप क्या देखते हैं?

निष्कर्ष—

ऊपर इस प्रकार बनी आकृति एक समांतर चतुर्भुज जैसी प्रतीत होती है, जिसका आधार संगत वृत्ताकार कट-आउट की परिधि के आधे के बराबर है तथा संगत ऊँचाई वृत्ताकार कट-आउट की त्रिज्या के बराबर है। अतः हमें प्राप्त होता है—

वृत्त का क्षेत्रफल = समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= समांतर चतुर्भुज का आधार×संगत ऊँचाई

= □ r□r

= □ r^2

विस्तार

वृत्त के त्रिज्यखंडों के 32 या 64 बराबर कट-आउट लेकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति की जा सकती है।

क्रियाकलाप 23

असमान जीवाओं द्वारा वृत्त के केंद्र पर अंतरित कोण

उद्देश्य

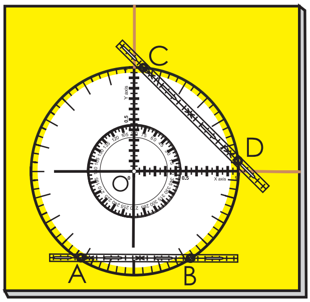
सत्यापन करना कि एक वृत्त की लंबी जीवा उसके केंद्र पर बड़ा कोण अंतरित करती है।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, दो प्लास्टिक की पट्टियाँ, रबर बैंड, वृत्ताकार बोर्ड के लिए संयोजक, संपूर्ण चाँदा।

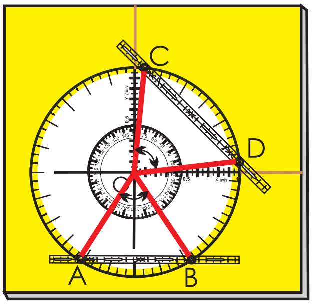
कैसे प्रारंभ करें ?

1. प्लास्टिक की दो पट्टियाँ लीजिए तथा उन्हें वृत्ताकार बोर्ड पर संयोजकों (कनेक्टर) की सहायता से लगाइए ताकि वे विभिन्न लंबाइयों वाली वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD निरूपित करें, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. विभिन्न रंगों के रबर बैंडों की सहायता से दोनों जीवाओं द्वारा केंद्र O पर अंतरित दो कोण बनाइए, जैसा आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. वृत्त के केंद्र पर बने ∠AOB और ∠COD को वृत्ताकार बोर्ड पर अंकित चिह्नों अथवा एक संपूर्ण चाँदे की सहायता से मापिए।
4. पट्टियों की विभिन्न लंबाइयाँ लेकर, उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	AB	CD	∠AOB	∠COD	लंबी जीवा	बड़ा कोण
1.						
2.						
3.						

निष्कर्ष—

लंबी जीवा द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण ....होता है।

क्रियाकलाप 24

समान लंबाइयों की जीवाओं द्वारा वृत्त के केंद्र पर अंतरित कोण

उद्देश्य

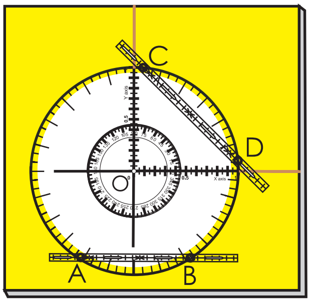
सत्यापन करना कि वृत्त की समान लंबाइयों जीवाएँ केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, दो प्लास्टिक की पट्टियाँ, रबर बैंड, वृत्ताकार बोर्ड के लिए संयोजक (कनेक्टर), संपूर्ण चाँदा।

कैसे प्रारंभ करें ?

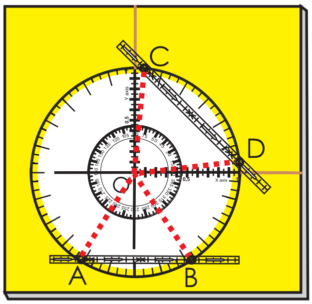
1. दो प्लास्टिक की पट्टियाँ लीजिए तथा उन्हें कनेक्टरों की सहायता से वृत्ताकार बोर्ड पर इस प्रकार लगाइए कि ये वृत्त की दो समान लंबाइयों जीवाएँ निरूपित करें, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. अलग-अलग रंगों के रबर बैंडों की सहायता से, दोनों जीवाओं द्वारा वृत्त के केंद्र O

पर अंतरित दोनों कोण बनाइए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. वृत्ताकार बोर्ड पर अंकित चिह्नों अथवा एक संपूर्ण चाँदे की सहायता से ∠AOB और ∠COD को मापिए।

4. समान लंबाइयों की विभिन्न जीवाएँ लेकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	AB	CD	∠AOB	∠COD	क्या ∠AOB= ∠COD है?
1.					
2.					
3.					

निष्कर्ष—

यदि AB........CD है, तो ∠AOB....... ∠COD होगा।
अर्थात् वृत्त की समान लंबाइयों को जीवाएँ.......अंतरित करती हैं।

क्रियाकलाप 25

वृत्त के केंद्र पर समान कोण अंतरित करती जीवाएँ

उद्देश्य

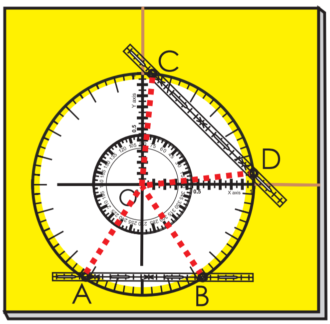
सत्यापन करना कि वृत्त के केंद्र पर समान (बराबर) कोण अंतरित करने वाली जीवाएँ लंबाई के समान होती हैं।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, दो प्लास्टिक की पट्टियाँ, रबर बैंड, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर।

कैसे प्रारंभ करें ?

1. वृत्ताकार बोर्ड पर कनेक्टरों की सहायता से उपयुक्त स्थानों पर दो प्लास्टिक की पट्टियाँ इस प्रकार लगाइए कि वे दिए हुए वृत्त के केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करने वाली दो जीवाएँ AB और CD निरूपित करें, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. दोनों जीवाओं AB और CD को निरूपित करने वाली पट्टियों में से प्रत्येक की दोनों कनेक्टरों के बीच की लंबाई मापिए।

3. वृत्ताकार बोर्ड पर, वृत्त के केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करने वाली जीवाओं के अन्य युग्म लेकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	∠AOB	∠COD	AB	CD	क्या AB=CD है?
1.					
2.					
3.					

निष्कर्ष—

वृत्त के केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करने वाली जीवाएँ.....होती हैं।

क्रियाकलाप 26

वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब

उद्देश्य

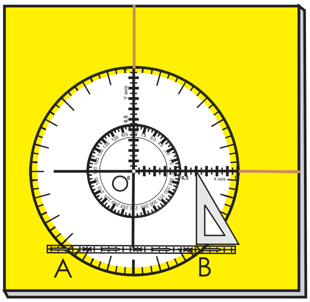
सत्यापन करना कि किसी वृत्त के केंद्र से एक जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, सेट स्क्वायर, प्लास्टिक की पट्टी, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर

कैसे प्रारंभ करें ?

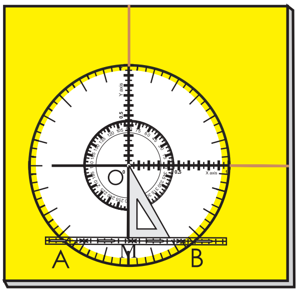
1. कनेक्टरों की सहायता से वृत्ताकार बोर्ड पर एक प्लास्टिक की पट्टी लगाइए, जो जीवा AB निरूपित करती है।
2. अब, सेट स्क्वायर लीजिए तथा उसे वृत्ताकार बोर्ड पर इस प्रकार रखिए कि इसका एक किनारा (कर्ण के अतिरिक्त) प्लास्टिक की पट्टी के किनारे के साथ संपाती हो, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

3. अब, सेट स्क्वायर को पट्टी के अनुदिश इस प्रकार सरकाइए कि सेट स्क्वायर का दूसरा किनारा वृत्ताकार बोर्ड पर वृत्त के केंद्र O से होकर जाए तथा सेट स्क्वायर और

प्लास्टिक की पट्टी के मिलान बिंदु को M से अंकित कीजिए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



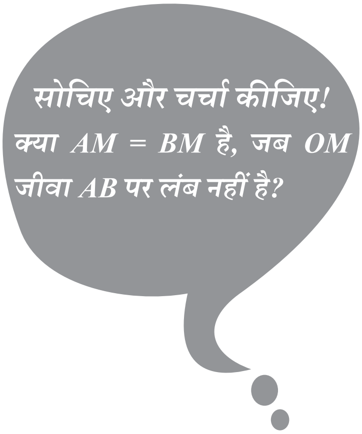
आकृति 2

4. AM और BM की लंबाइयों को मापिए।
5. प्लास्टिक की पट्टियों का प्रयोग करते हुए विभिन्न लंबाइयों की विभिन्न जीवाएँ बनाकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	AM	BM	क्या AM = BM है?
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष—

यदि OM $\perp$ AB है, तो AM = ... है।



क्रियाकलाप 27

वृत्त के केंद्र से होकर एक जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा

उद्देश्य

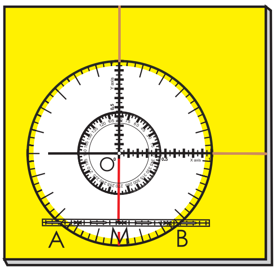
सत्यापन करना कि एक वृत्त के केंद्र से होकर किसी जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा उस जीवा पर लंब होती है।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, एक प्लास्टिक की पट्टी, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर, पट्टियों के लिए कनेक्टर, रबर बैंड, एक अर्ध चाँदा।

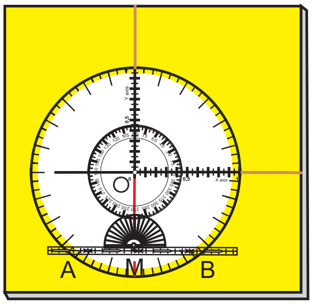
कैसे प्रारंभ करें ?

1. जीवा AB निरूपित करने के लिए, वृत्ताकार बोर्ड पर उपयुक्त बिंदुओं पर कनेक्टरों की सहायता से प्लास्टिक की एक पट्टी लगाइए।
2. वृत्त के केंद्र O पर एक कनेक्टर लगाइए तथा पट्टियों के लिए एक कनेक्टर जीवा के मध्य-बिंदु M पर लगाइए। अब, वृत्त के केंद्र से होकर जीवा AB को समद्विभाजित करने वाली रेखा को निरूपित करने के लिए उपरोक्त दोनों कनेक्टरों पर एक रबर बैंड बाँधिए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

3. एक अर्ध चाँदे को इए प्रकार रखिए कि उसका केंद्र जीवा AB के मध्य-बिंदु के साथ संपाती हो, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

4. अब ∠OMA और ∠OMB को मापिए।
5. पट्टी को विभिन्न स्थितियों पर लगाकर, विभिन्न लंबाइयों की जीवाएँ बनाकर उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	∠OMA	∠OMB
1.		
2.		
3.		

निष्कर्ष—

∠OMA एक ...... कोण है। अत: ....है।

क्रियाकलाप 28

एक वृत्त की बराबर जीवाएँ

उद्देश्य

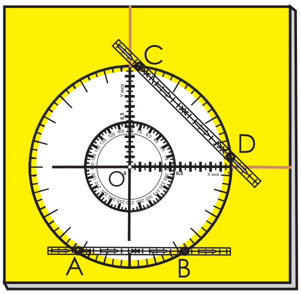
सत्यापन करना कि एक वृत्त की बराबर जीवाएँ उस वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, दो प्लास्टिक की पट्टियाँ, एक सेट स्क्वायर, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर।

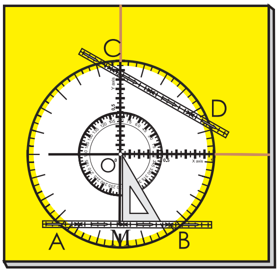
कैसे प्रारंभ करें ?

1. वृत्ताकार बोर्ड पर, कनेक्टरों की सहायता से उपयुक्त रूप से दो प्लास्टिक की पट्टियों को इस प्रकार लगाइए कि वे केंद्र O वाले वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB और CD निरूपित करें, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



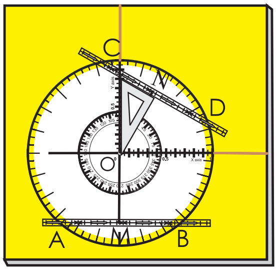
आकृति 1

2. एक सेट स्क्वायर लीजिए तथा उसके एक किनारे (कर्ण के अतिरिक्त) को एक पट्टी AB के अनुदिश इस प्रकार सरकाइए कि सेट स्क्वायर का दूसरा किनारा वृत्ताकार बोर्ड पर वृत्त के केंद्र से होकर जाए तथा AB पर लंब हो। सेट स्क्वायर और प्लास्टिक की पट्टी के मिलान बिंदु को M से अंकित कीजिए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. लंबाई OM को मापिए। अब, जीवा CD के लिए चरण 2 को दोहराइए तथा केंद्र O से जीवा CD पर लंब ON की लंबाई मापिए।



आकृति 3

4. विभिन्न स्थितियों पर प्लास्टिक की पट्टियों को लगाकर बराबर जीवाओं AB और CD की लंबाइयों को बदलकर, उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	AB	CD	OM	ON	क्या OM = ON है?
1.					
2.					
3.					

निष्कर्ष—

एक वृत्त की बराबर जीवाएँ .... होती हैं।

सोचिए और चर्चा कीजिए!

(i) क्या $OM = ON$ है, यदि $AB \neq CD$ है?

(ii) यदि $AB > CD$ है, तो क्या $OM > ON$ है या $OM < ON$ है?

क्रियाकलाप 29

वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ

उद्देश्य

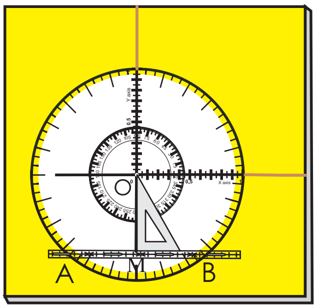
सत्यापन करना कि एक वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ बराबर होती हैं।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, दो प्लास्टिक की पट्टियाँ, एक सेट स्क्वायर (वृत्ताकार बोर्ड के लिए), कनेक्टर।

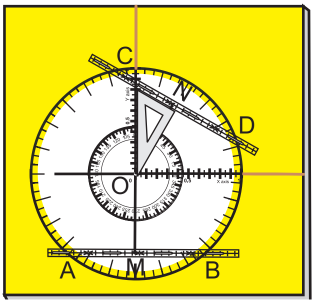
कैसे प्रारंभ करें ?

1. एक प्लास्टिक की पट्टी लीजिए तथा उसे वृत्ताकार बोर्ड पर, एक सेट स्क्वायर की सहायता से, वृत्त के केंद्र O से एक सुविधाजनक दूरी OM (मान लीजिए 5 cm) पर लगाइए, जो एक जीवा AB को निरूपित करेगी, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. अब, पुन: सेट स्क्वायर की सहायता से ही, एक अन्य प्लास्टिक की पट्टी केंद्र से समान दूरी ON (5 cm) पर दूसरी जीवा CD निरूपित करने के लिए लगाइए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. अब प्लास्टिक की पट्टियों पर अंकित चिह्नों का प्रयोग करते हुए, जीवाओं AB और CD की लंबाइयों को मापिए।
4. वृत्ताकार बोर्ड पर, वृत्त के केंद्र O से समदूरस्थ जीवाओं के अन्य युग्म निरूपित करने के लिए, प्लास्टिक की दोनों पट्टियों को विभिन्न स्थानों पर लगाकर, उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	OM	ON	AB	CD	क्या AB=CD है?
1.					
2.					
3.					

निष्कर्ष—

वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ .... होती हैं।

सोचिए और चर्चा कीजिए!

(i) क्या $AB = CD$ है, यदि $ON \neq OM$ है?

(ii) यदि $ON > OM$ है,तो क्या $AB > CD$ है या $AB < CD$ है?

क्रियाकलाप 30

एक वृत्त पर दो समान चाप

उद्देश्य

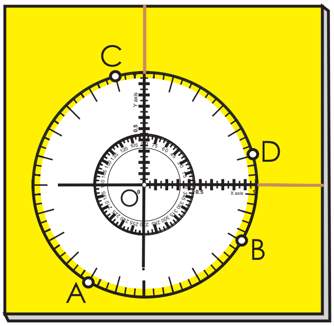
सत्यापन करना कि किसी वृत्त के समान चाप, वृत्त के केंद्र पर समान कोण अंतरित करते हैं।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर, रबर बैंड और संपूर्ण चाँदा।

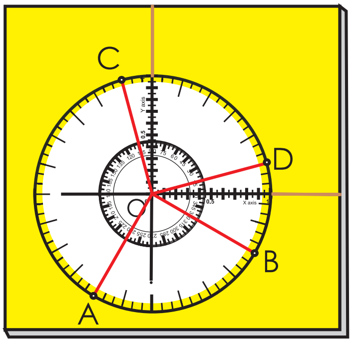
कैसे प्रारंभ करें ?

1. दो बराबर चाप AB और CD निरूपित करने के लिए, वृत्ताकार बोर्ड पर वृत्त की परिसीमा पर चार कनेक्टरों को उपयुक्त स्थानों पर लगाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. वृत्ताकार बोर्ड पर वृत्त के केंद्र O पर एक कनेक्टर लगाइए तथा दो अलग रंगों के रबर बैंडों की सहायता से, इन चापों द्वारा केंद्र O पर अंतरित $\angle AOB$ और $\angle COD$ बनाइए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. अब, ∠AOB और ∠COD को वृत्त के केंद्र पर अंकित डिग्री चिह्नों की सहायता से अथवा वृत्त के केंद्र पर एक संपूर्ण चाँदा लगाकर मापिए।
4. वृत्ताकार बोर्ड पर बराबर चापों के विभिन्न युग्म लेकर, उपरोक्त क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	∠AOB	∠COD	क्या ∠AOB = ∠COD है?
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष—

किसी वृत्त के बराबर चाप.......अंतरित करते हैं।

सोचिए और चर्चा कीजिए!

(i) क्या ∠AOB = ∠COD, जब वृत्त के चाप AB और CD बराबर नहीं है?

(ii) यदि चाप AB > चाप CD है, तो क्या ∠AOB > ∠COD है?

क्रियाकलाप 31

केंद्र तथा वृत्त पर स्थित किसी बिंदु पर अंतरित कोण

उद्देश्य

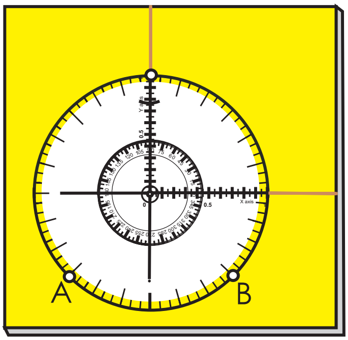
सत्यापन करना कि वृत्त के किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दोगुना होता है।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर, रबर बैंड और एक अर्ध चाँदा।

कैसे प्रारंभ करें ?

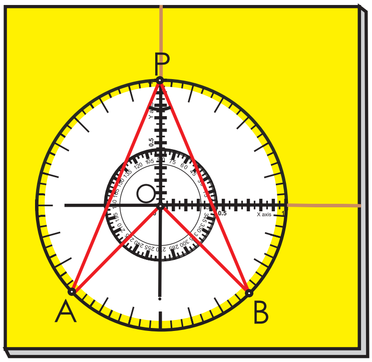
1. एक चाप AB को निरूपित करने के लिए, वृत्ताकार बोर्ड पर वृत्त की परिसीमा पर दो उपयुक्त स्थानों पर दो कनेक्टरों को लगाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

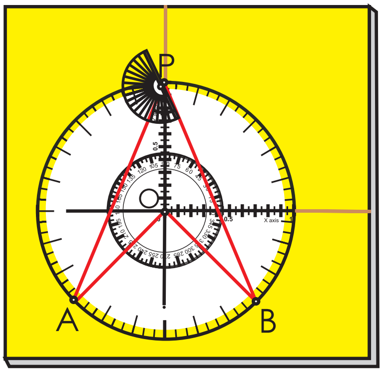
2. वृत्त के केंद्र O पर एक कनेक्टर लगाइए तथा रबर बैंड का प्रयोग करते हुए इस चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित $\angle AOB$ बनाइए।

3. अब वृत्ताकार बोर्ड पर वृत्त की परिसीमा के शेष भाग पर स्थित किसी भी बिंदु P पर एक कनेक्टर लगाइए तथा एक अन्य रबर बैंड की सहायता से इसी चाप AB द्वारा अंतरित ∠APB प्रदर्शित कीजिए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

4. वृत्ताकार बोर्ड पर, वृत्त के केंद्र पर अंकित डिग्री चिह्नों की सहायता से ∠AOB को मापिए तथा P पर एक अर्ध चाँदा रखकर, ∠APB को मापिए, जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है।



आकृति 3

5. वृत्ताकार बोर्ड पर, वृत्त की परिसीमा पर बिंदु P की विभिन्न स्थितियाँ लेकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए।
6. साथ ही, कनेक्टरों की सहायता से, चाप AB की लंबाइयों को बदलकर भी इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा दी गई सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	$\angle AOB$	$\angle APB$	क्या $\angle AOB = 2 \angle APB$ है?
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष—

एक चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण .... होता है।

सोचिए और चर्चा कीजिए!

(i) यदि बिंदु P वृत्त के बाहर स्थित है, तो क्या $\angle AOB = 2 \angle APB$ है?

(ii) यदि बिंदु P वृत्त के अंदर स्थित है, तो क्या $\angle AOB = 2 \angle APB$ है?

क्रियाकलाप 32

एक ही वृत्तखंड में बने कोण

उद्देश्य

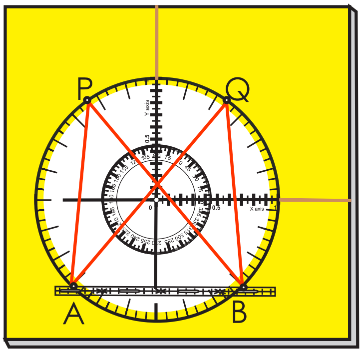
सत्यापन कीजिए कि एक ही वृत्तखंड में बने सभी कोण समान होते हैं।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर, रबर बैंड, एक प्लास्टिक की पट्टी, एक अर्ध चाँदा।

कैसे प्रारंभ करें ?

1. वृत्ताकार बोर्ड पर, वृत्त की एक जीवा AB निरूपित करने के लिए, कनेक्टरों की सहायता से एक प्लाप्टिक की पट्टी लगाइए।
2. वृत्ताकार बोर्ड पर, वृत्त की परिसीमा पर, AB के एक ही ओर दो विभिन्न बिंदुओं P और Q पर दो पिन लगाइए।
3. एक ही वृत्तखंड में बने $\angle APB$ और $\angle AQB$ निरूपित करने के लिए दो अलग-अलग रंगों के रबर बैंडों का प्रयोग कीजिए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

4. अर्ध चाँदे का प्रयोग करते हुए, $\angle APB$ और $\angle AQB$ को मापिए।
5. एक ही वृत्तखंड में कोणों के विभिन्न युग्म लेकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	$\angle$APB	$\angle$AQB	क्या $\angle$APB=$\angle$AQB है?
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष—

एक ही वृत्तखंड में बने कोण............होते हैं।

सोचिए और चर्चा कीजिए!
क्या $\angle APB = \angle AQB$ है, यदि बिंदुओं P और Q में से एक बिंदु वृत्त बोर्ड की परिसीमा पर स्थित नहीं है?

क्रियाकलाप 33

अर्धवृत्त में बना कोण

उद्देश्य

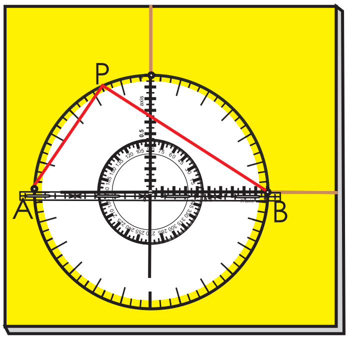
सत्यापन कीजिए कि अर्धवृत्त में बना कोण एक समकोण होता है।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर, रबर बैंड, एक प्लास्टिक की पट्टी, एक अर्ध चाँदा।

कैसे प्रारंभ करें ?

1. वृत्त का एक व्यास AB निरूपित करने के लिए, वृत्ताकार बोर्ड पर वृत्त की परिसीमा पर उपयुक्त दो बिंदु लेकर, कनेक्टरों की सहायता से एक प्लास्टिक की पट्टी लगाइए।
2. वृत्ताकार बोर्ड पर, वृत्त की परिसीमा पर किसी अन्य बिंदु P पर एक कनेक्टर लगाइए।
3. रबर बैंड का प्रयोग करते हुए, आकृति 1 में दर्शाए अनुसार अर्धवृत्त में ∠APB बनाइए।



आकृति 1

4. अर्ध चाँदे का प्रयोग करते हुए ∠APB को मापिए।
5. अर्धवृत्त पर बिंदु P की विभिन्न स्थितियाँ लेकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	∠APB
1.	
2.	
3.	

निष्कर्ष—

अर्धवृत्त में बना कोण...........होता है।

सोचिए और चर्चा कीजिए!

(i) यदि AB व्यास नहीं है, तो ∠APB की माप क्या होगी?

(ii) आप निम्नलिखित में बने कोण के बारे में क्या कह सकते हैं?

(i) एक दीर्घवृत्तखंड में

(ii) एक लघु वृत्तखंड में

क्रियाकलाप 34

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के युग्म

उद्देश्य

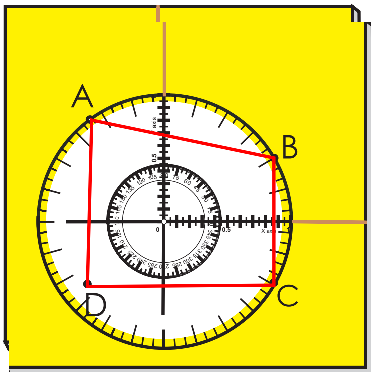
सत्यापन कीजिए कि एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म में कोणों का योग 180° होता है।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर, रबर बैंड, दो अर्ध चाँदे।

कैसे प्रारंभ करें ?

1. वृत्ताकार बोर्ड पर, वृत्त की परिसीमा पर चार उपयुक्त बिंदु A,B,C और D पर कनेक्टरों को लगाइए तथा रबर बैंड की सहायता से एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD बनाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. ∠ABC और ∠ADC को अर्ध चाँदों की सहायता से मापिए तथा उनका योग ज्ञात कीजिए।

3. साथ ही, $\angle BAD$ और $\angle BCD$ को अर्ध चाँदों की सहायता से मापिए तथा उनका योग ज्ञात कीजिए।
4. वृत्ताकार बोर्ड पर कनेक्टरों की स्थितियाँ बदलते हुए, अन्य चक्रीय चतुर्भुज बनाकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	$\angle ABC$	$\angle ADC$	$\angle ABC+\angle ADC$	$\angle BCD$	$\angle BAD$	$\angle BCD+\angle BAD$
1.						
2.						
3.						

निष्कर्ष—

किसी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म में कोणों का योग........होता है।

> ***सोचिए और चर्चा कीजिए!***
> *यदि वृत्ताकार बोर्ड पर, बिंदुओं A,B,C और D में से एक बिंदु वृत्त की परिसीमा पर स्थित नहीं हो, तो क्या $\angle ABC+\angle ADC=180°$ अथवा $\angle BCD+\angle BAD=180°$ होगा?*

क्रियाकलाप 35

अचक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के युग्म

उद्देश्य

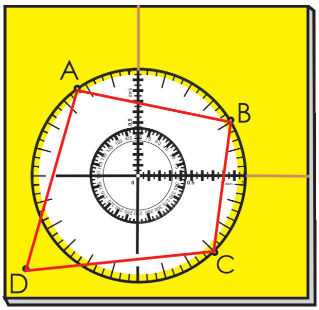
सत्यापन कीजिए कि किसी अचक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म के कोणों का योग 180° नहीं होता है।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, प्लास्टिक की पट्टियाँ, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर, पट्टियों के लिए कनेक्टर रबर बैंड, एक अर्ध चाँदा।

कैसे प्रारंभ करें ?

1. वृत्ताकार बोर्ड पर चार कनेक्टरों को बिंदुओं A,B,C और D पर इस प्रकार लगाइए कि तीन कनेक्टर वृत्त की परिसीमा पर स्थित हों तथा चौथा कनेक्टर वृत्त की परिसीमा के बाहर हो।
2. रबर बैंड का प्रयोग करते हुए, एक चतुर्भुज ABCD बनाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

3. $\angle ADC$ और $\angle ABC$ को अर्ध चाँदे की सहायता से मापिए तथा उनका योग ज्ञात कीजिए।
4. इसी प्रकार, अर्ध चाँदों की सहायता से $\angle DAB$ और $\angle DCB$ को भी मापिए तथा उनका योग ज्ञात कीजिए। बिंदुओं की विभिन्न स्थितियाँ लेकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

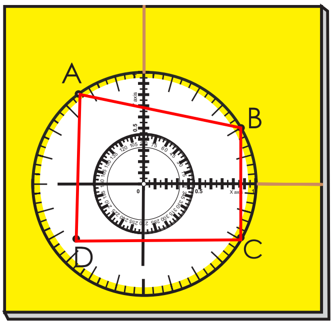
क्रम सं.	$\angle ADC$	$\angle ABC$	$\angle ADC+\angle ABC$	$\angle DAB$	$\angle DCB$	$\angle DAB+\angle DCB$
1.						
2.						
3.						

निष्कर्ष—

क्या $\angle ADC + \angle ABC = 180°$ है?

क्या $\angle DAB + \angle DCB = 180°$ है?

अब, पुन: चारों कनेक्टरों को वृत्ताकार बोर्ड पर इस प्रकार लगाइए कि तीन कनेक्टर वृत्त की परिसीमा पर स्थित हों तथा चौथा वृत्त के अंदर हो, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

6. $\angle ADC$ और $\angle ABC$ को अर्ध चाँदे की सहायता से मापिए तथा उनका योग ज्ञात कीजिए।
7. इसी प्रकार, $\angle DAB$ और $\angle DCB$ को भी अर्ध चाँदे की सहायता से मापिए तथा

उनका योग ज्ञात कीजिए। बिंदुओं की स्थितियाँ बदलकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	∠ADC	∠ABC	∠ADC+∠ABC	∠DAB	∠DCB	∠DAB+∠DCB
1.						
2.						
3.						

निष्कर्ष—

किसी अचक्रीय चतुर्भुज में सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म के कोणों का योग.......होता है।

वृत्त के एक बिंदु पर स्पर्श रेखा

सोचिए और चर्चा कीजिए!

आकृति 1 और आकृति 2 में, बिंदु D को धीरे-धीरे वृत्ताकार बोर्ड की परिसीमा की ओर चलाने का प्रयास कीजिए तथा सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म में उसी अनुसार उनका योग ज्ञात करते रहिए। क्या यह योग 180° के निकटतर होता जाता है?

क्रियाकलाप 36

उद्देश्य

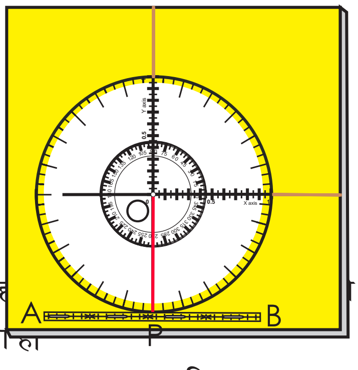
सत्यापन कीजिए कि वृत्त के किसी बिंदु पर खीची गई स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, एक प्लास्टिक की पट्टी, एक अर्ध चाँदा, रबर बैंड, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर।

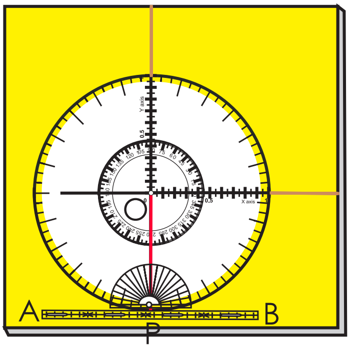
कैसे प्रारंभ करें ?

1. वृत्ताकार बोर्ड की परिसीमा के किसी बिंदु, मान लीजिए P, पर एक पट्टी को इस प्रकार लगाइए कि वह पट्टी, स्पर्श रेखा APB को निरूपित करे।
2. वृत्ताकार बोर्ड के केंद्र O पर एक कनेक्टर लगाइए तथा इसे एक रबर बैंड का प्रयोग करते हुए P से मिलाइए, जो वृत्त की त्रिज्या OP को निरूपित करे, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

3. अर्ध चाँदे की सह... मापिए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

4. वृत्ताकार बोर्ड की परिसीमा के विभिन्न बिंदुओं पर पट्टी को रखकर, इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	$\angle$OPA	$\angle$OPB
1.		
2.		
3.		

निष्कर्ष—

वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा...............होती है।

सोचिए और चर्चा कीजिए!
यदि पट्टी पर कोई बिंदु Q बिंदु P के अतिरिक्त है, तो क्या $OQ > OP$ है या $OQ = OP$ है या $OQ < OP$ है?

क्रियाकलाप 37

बाहरी बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ

उद्देश्य

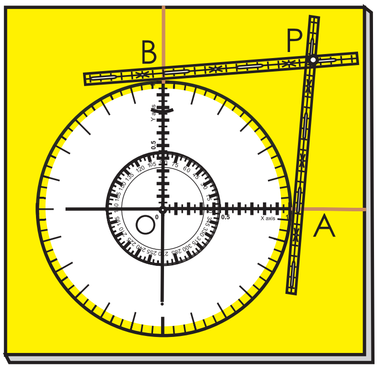
सत्यापन कीजिए कि किसी बाहरी बिंदु से वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ समान होती हैं।

वाँछित सामग्री

वृत्ताकार बोर्ड, दो प्लास्टिक की पट्टियाँ, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर।

कैसे प्रारंभ करें ?

1. वृत्ताकार बोर्ड की परिसीमा के बाहर एक सुविधाजनक बिंदु P चुनिए तथा बिंदु पर दो प्लास्टिक की पट्टियाँ लगाइए।
2. अब दोनों पट्टियों को इस प्रकार समायोजित कीजिए कि वे वृत्ताकार बोर्ड की परिसीमा को, दो बिंदुओं मान लीजिए A और B, पर स्पर्श करें, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

3. प्लास्टिक की पट्टियों पर अंकित चिह्नों का प्रयोग करते हुए PA और PB की लंबाइयों को मापिए।
4. वृत्ताकार बोर्ड की परिसीमा के बाहर दोनों पट्टियों को विभिन्न स्थितियों में लगाकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	PA	PB	क्या PA=PB है?
1.			
2.			
3.			

निष्कर्ष—

बाहरी बिंदु से वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाएँ ...... होती हैं।

सोचिए और चर्चा कीजिए!
जब P वृत्त पर स्थित होता है,
तब क्या होता है?

क्रियाकलाप 38

त्रिकोणमितीय अनुपात-I

उद्देश्य

वृत्ताकार बोर्ड का प्रयोग करते हुए विभिन्न त्रिकोणमितीय अनुपातों का अर्थ समझना।

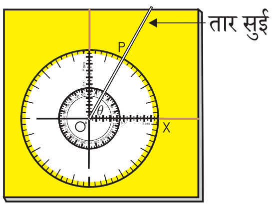
वाँछित सामग्री

इकाई त्रिज्या का वृत्ताकार बोर्ड, तार सुई, सेट स्क्वायर, प्लास्टिक की (B प्रकार की) पट्टियाँ, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर।

कैसे प्रारंभ करें ?

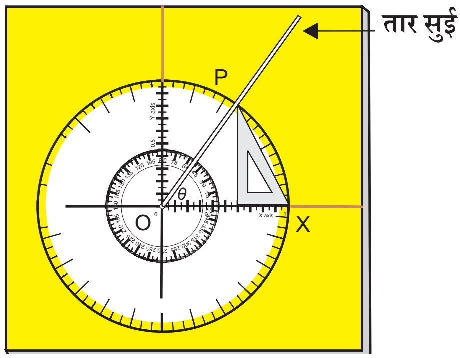
(क) sinθ, cosθ

1. वृत्ताकार बोर्ड पर अंकित क्षैतिज रेखा से कोण POX=θ बनाने के लिए, वृत्ताकार बोर्ड के केंद्र O पर तार सुई लगाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



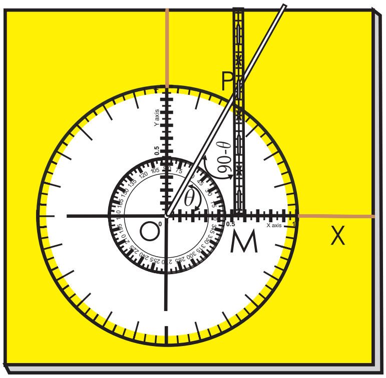
आकृति 1

2. सेट स्क्वायर को इस प्रकार रखिए कि सेट स्क्वायर का कर्ण के अतिरिक्त एक किनारा क्षैतिज रेखा के साथ संपाती हो।
3. अब सेट स्क्वायर को क्षैतिज रेखा के अनुदिश इस प्रकार सरकाइए कि सेट स्क्वायर का समकोण बनाने वाला दूसरा किनारा बिंदु P से होकर जाए (यदि आवश्यक हो, तो आप सही-सही लंब प्राप्त करने के लिए अस्थायी रूप से सुई को हटा सकते हैं।) जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

4. सेट स्क्वायर के इस िकनारे के अनुदिश एक प्लास्टिक की पट्टी (B प्रकार की) रखिए, जो क्षैतिज रेखा OX पर एक लंब PM निरूपित करेगी, जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है।



आकृति 3

5. अब, PM और OM की लंबाइयों को मापिए।

6. $\sin\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{PM}{1} = PM$

   तथा $\cos\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OM}{1} = OM$

7. सुई की स्थितियों को बदलते हुए, विभिन्न कोणों को बनाकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम स.	θ	PM	OM	$\sin\theta$	$\cos\theta$
1.					
2.					
3.					

पूरक कोणों के साइन (sine) और कोसाइन (cosine)

8. आकृति 3 में, $\angle OPM = 90° - \theta$

$$\sin(90°-\theta) = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} = OM = \cos\theta$$

$$\cos(90°-\theta) = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{PM}{OP} = \frac{PM}{1} = PM = \sin\theta$$

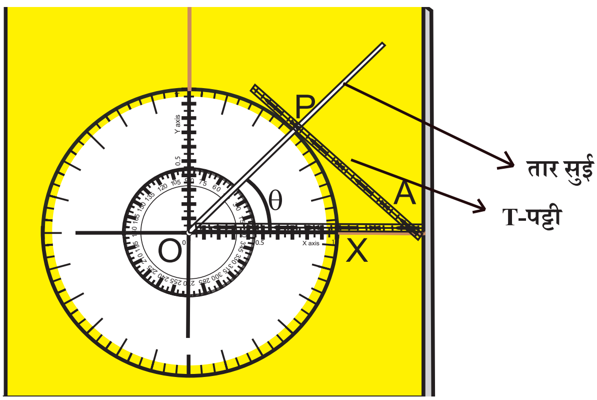
1. इस प्रकार हमें प्राप्त होता है—

   $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ तथा $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

(ख) $\tan\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$ और $\operatorname{cosec}\theta$

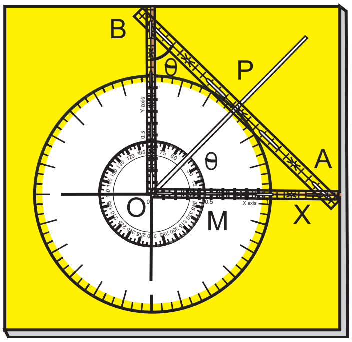
कैसे प्रारंभ करें ?

1. क्षैतिज रेखा से कोण $POX = \theta$ बनाने के लिए, वृत्ताकार बोर्ड पर वृत्त के केंद्र O पर तार सुई लगाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।
2. एक प्लास्टिक की पट्टी बिंदु P पर वृत्ताकार बोर्ड से स्पर्श करती हुई लगाइए तथा दूसरी प्लास्टिक की पट्टी क्षैतिज रेखा OX के अनुदिश रखिए, जो पहली पट्टी को A पर मिलती है, जैसा कि आकृति 4 में दर्शाया गया है।



आकृति 4

3. केंद्र O से होकर जाने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश एक अन्य प्लास्टिक की पट्टी रखिए जो पहली पट्टी को बिंदु B पर मिलती है, जैसा कि आकृति 5 में दर्शाया गया है।



आकृति 5

4. समकोण त्रिभुज APO से,

$$\tan\theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{सलग्न भुजा}} = \frac{AP}{OP} = \frac{AP}{1} = AP$$

$$\text{तथा } \sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सलग्न भुजा}} = \frac{OA}{OP} = \frac{OA}{1} = OA$$

5. समकोण त्रिभुज BPO से, $\angle PBO = \theta$ है।

$$\cot\theta = \frac{\text{सलग्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{BP}{OP} = \frac{BP}{1} = BP$$

$$\text{तथा } \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = \frac{OB}{OP} = \frac{OB}{1} = OB$$

6. सुई की स्थितियों को बदलकर विभिन्न कोणों को बनाते हुए, इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	θ	tan θ	sec θ	cot θ	cosec θ
1.					
2.					
3.					

7. पूरक कोणों के tan, sec, cot और cosec

आकृति 5 में दिए त्रिभुज OAP से, $\angle OAP = 90° - \theta$ है।

$$\cot(90° - \theta) = \frac{\text{सलग्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{AP}{OP} = \frac{AP}{1} = AP = \tan \text{¸ .}$$

$$\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{OA}{OP} = \frac{OA}{1} = OA = sec\theta$$

अब, अाकृति 5 में दिए त्रिभुज POB से, $\angle BOP = 90° - \theta$ है।

$$\tan(90° - \theta) = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{सलग्न भुजा}} = \frac{BP}{OP} = \frac{BP}{1} = BP = \cot\theta$$

$$\sec(90° - \theta) = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सलग्न भुजा}} = \frac{OB}{OP} = \frac{OB}{1} = OB = \operatorname{cosec}\theta$$

इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है—

$$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$$

$$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$$

सोचिए और चर्चा कीजिए!

क्या आकृति 3 से त्रिकोणमितीय अनुपात tan θ, cot θ, sec θ और cosec θ प्राप्त किए जा सकते हैं? हम आकृति 5 का प्रयोग क्यों कर रहे हैं?

क्रियाकलाप 39

त्रिकोणमितीय अनुपात-II

उद्देश्य

कुछ विशिष्ट कोणों, जैसे– 0°, 30°, 45°, 60° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना।

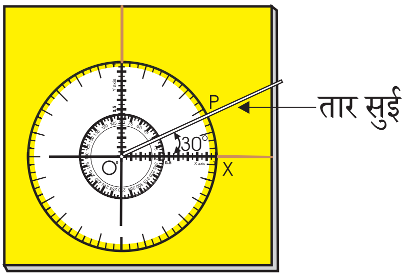
वाँछित सामग्री

इकाई त्रिज्या का वृत्ताकार बोर्ड, प्लास्टिक की पट्टियाँ (B प्रकार की), वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर, तार सुई, सेट स्क्वायर।

कैसे प्रारंभ करें ?

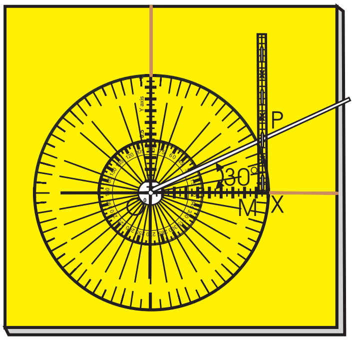
30°, 45° और 60° के साइन और कोसाइन के लिए

1. वृत्ताकार बोर्ड पर वृत्त के केंद्र O पर तार सुई को इस प्रकार लगाइए कि यह क्षैतिज रेखा OX के साथ $\angle POX = 30°$ बनाए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. अब, एक सेट स्क्वायर का प्रयोग करते हुए, जैसा कि पहले क्रियाकलाप 38 में किया था, बिंदु P से होकर जाती हुई एक प्लास्टिक की पट्टी इस प्रकार रखिए कि वह क्षैतिज रेखा OX पर लंब PM निरूपित करे, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. अब, PM और OM की लंबाइयों को मापिए।

4. $\sin 30^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{PM}{1} = PM = 0.5$

$\cos 30^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} = OM = 0.9$(लगभग)

5. इसी प्रकार का क्रियाकलाप ∠POX को 45° और 60° लेकर किया जा सकता है।

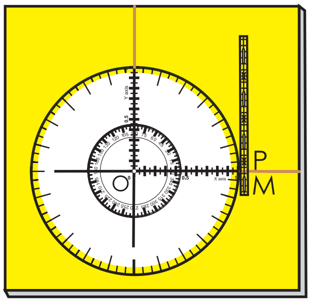
6.1 sin0° और cos0° के लिए

(i) कोई भी कोण मान लीजिए ∠POX= θ बनाने के लिए तार सुई को लगाइए।

(ii) जिस प्रकार पहले स्पष्ट किया जा चुका है, उसी प्रकार सेट स्क्वायर का प्रयोग करते हुए, क्षैतिज रेखा OX पर लंब PM निरूपित करने के लिए एक प्लास्टिक की पट्टी लगाइए।

(iii) अब तार सुई को दक्षिणावर्त (घड़ी की सुई घूमने की) दिशा में घुमाइए तथा उसी के अनुसार लंब PM निरूपित करने वाली पट्टी की स्थिति भी बदलते जाइए।

(iv) जब तार सुई OX के साथ संपाती हो जाए, अर्थात् जब $\theta = 0°$ हो जाए, तब P और M संपाती हो जाते हैं। तब OM=1 हो जाता है और PM=0 हो जाता है, जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है।



आकृति 3

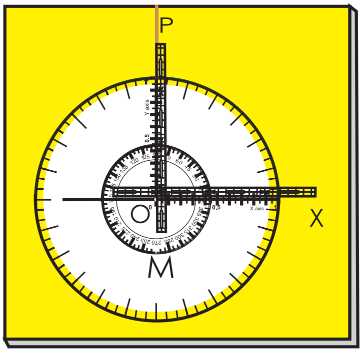
अतः, $\sin 0° = PM = 0$ है तथा $\cos 0° = OM = 1$ है।

6.2 sin 90° और cos 90° के लिए

(i) जैसा कि पहले 6.1 में स्पष्ट किया गया है, उसी प्रकार क्षैतिज रेखा OX पर लंब PM निरूपित करने के लिए एक प्लास्टिक की पट्टी लगाइए।

(ii) अब, तार सुई को वामावर्त दिशा में घुमाइए तथा उसी अनुसार लंब PM निरूपित करने वाली पट्टी की स्थिति भी बदलते जाइए।

(iii) जब तार सुई ऊर्ध्वाधर रेखा OY के साथ संपाती हो जाती है, अर्थात् जब $\theta = 90°$ है, तब बिंदु O और M संपाती हो जाते हैं। तब, PM=1 है OM=0 है, जैसा कि आकृति 4 में दर्शाया गया है।



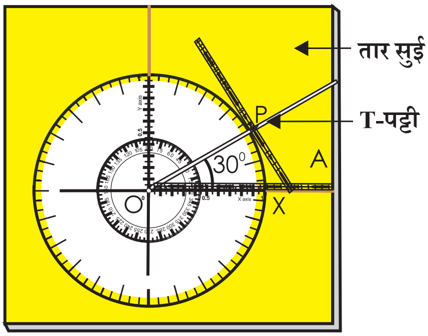
आकृति 4

अतः, $\sin 90° = PM = 1$ है तथा $\cos 90° = OM = 0$ है।

6.3 30°, 45° अौर 60° के tan, sec, cot और cosec के लिए

(i) क्षैतिज रेखा OX से $\angle POX = 30°$ बनाने के लिए, वृत्ताकार बोर्ड पर वृत्त के केंद्र O पर तार सुई लगाइए (जैसा पहले स्पष्ट किया जा चुका है)।

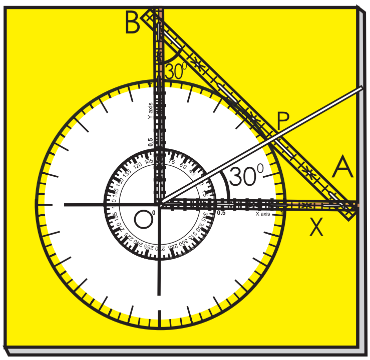
(ii) बिंदु P पर वृत्ताकार बोर्ड को स्पर्श करती हुई प्लास्टिक की एक पट्टी लगाइए तथा



एक अन्य पट्टी OX के अनुदिश रखिए जो पहली पट्टी से A पर मिले, जैसा कि आकृति 5 में दर्शाया गया है।

आकृति 5

(iii) केंद्र O से होकर जाती हुई ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश एक अन्य प्लास्टिक की पट्टी रखिए, जो पहली पट्टी से B पर मिले, जैसा कि आकृति 6 में दर्शाया गया है।



आकृति 6

(iv) अब AP, OA, PB और OB को मापिए।

(v) $\tan 30^\circ = \dfrac{AP}{OP} = \dfrac{AP}{1} = AP$

$\sec 30^\circ = \dfrac{OA}{OP} = \dfrac{OA}{1} = OA$

$\cot 30^\circ = \dfrac{BP}{OP} = \dfrac{BP}{1} = BP$

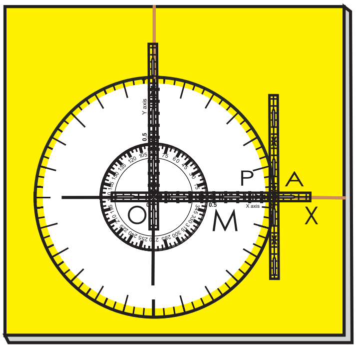
$\text{cosec } 30^\circ = \dfrac{OB}{OP} = \dfrac{OB}{1} = OB$

6.∠POX को 45° और 60° लेकर इसी क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति की जा सकती है।

7.1 0° के tan, sec, cot अ ौर cosec के लिए

(i) कोई भी कोण मान लीजिए ∠POX= θ बनाने के लिए तार सुई को लगाइए।

(ii) जैसा पहले स्पष्ट किया जा चुका है, सेट स्क्वायर की सहायता से, क्षैतिज रेखा OX पर लंब PM निरूपित करने के लिए एक प्लास्टिक की पट्टी लगाइए। तार सुई को दक्षिणावर्त दिशा में घुमाइए तथा उसी के अनुसार प्लास्टिक की पट्टी की स्थिति को भी बदलते जाइए ताकि जब तार सुई OX के संपाती हो, अर्थात् जब θ =0° हो, AP=0 हो जाए, जब P और A संपाती हों, जैसा कि आकृति 7 में दर्शाया गया है।



आकृति 7

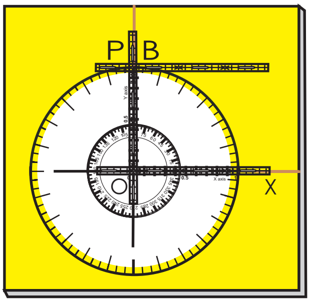
(iii) अब, $\tan 0^\circ = \dfrac{AP}{OP} = \dfrac{0}{1} = 0$

(iv) cot 0 परिभाषित नहीं हैं, क्योंकि दोनों पट्टियाँ समांतर होंगी।

(v) cosec 0° परिभाषित नहीं है, क्योंकि दोनों पट्टियाँ समांतर होंगी।

7.२ 90° के tan, sec, cot और cosec के लिए

(i) पट्टियों को पहले 7.1 में स्पष्ट किए अनुसार व्यवस्थित कीजिए। अब तार सुई को वामावर्त दिशा में घुमाइए तथा उसी के अनुसार प्लास्टिक की पट्टी की स्थिति को भी बदलते जाइए ताकि जब सुई ऊर्ध्वाधर रेखा OY के साथ संपाती हो, अर्थात् जब $\theta=90^\circ$ हो, PB$=0$ हो जाए तथा बिंदु P और B संपाती हों, जैसा कि आकृति 8 में दर्शाया गया है।



आकृति 8

(ii) tan 90° परिभाषित नहीं है, क्योंकि पट्टियाँ समांतर होंगी।

(iii) sec 90° परिभाषित नहीं है, क्योंकि पट्टियाँ समांतर होंगी।

(iv) साथ ही, $\cot 90^\circ = \dfrac{PB}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$

तथा $\text{cosec } 90^\circ = \dfrac{OB}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

सोचिए और चर्चा कीजिए!

(i) क्या $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ है?

(ii) क्या $\tan 0^\circ = \cot 90^\circ$ है?

(iii) क्या $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ है?

(iv) क्या $\sin 30^\circ = \text{cosec } 30^\circ$ है?

(v) क्या $\cos 60^\circ = \sec 60^\circ$ है?

क्रियाकलाप 40

त्रिकोणमितीय अनुपात और समकोण त्रिभुज की भुजाएँ

उद्देश्य

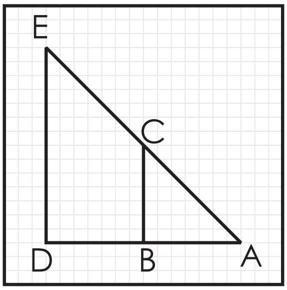
सत्यापन कीजिए कि किसी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयों के साथ नहीं बदलते हैं।

वाँछित सामग्री

जियोबोर्ड, रबर बैंड, रूलर, जियोबोर्ड पिन।

कैसे प्रारंभ करें ?

1. जियोबोर्ड पर उपयुक्त बिंदुओं A,B,C,D और E पर पाँच जियोपिन लगाइए तथा दो समरूप समकोण त्रिभुज निरूपित करने के लिए, इन्हें अलग-अलग रंगों के दो रबर बैंडों से जोड़िए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. एक रूलर (स्केल) का प्रयोग करते हुए AB, BC, AD, DE, AC और AE की लंबाइयाँ मापिए।

3. $\frac{BC}{AC}, \frac{AB}{AC}, \frac{BC}{AB}, \frac{DE}{AE}, \frac{AD}{AE}$ और $\frac{DE}{AD}$ ज्ञात कीजिए।

4. समरूप समकोण त्रिभुजों के अन्य युग्म लेकर इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

निष्कर्ष—

क्रम सं.	AB	BC	AC	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{AB}{AC}$	$\frac{BC}{AB}$	AD	DE	AE	$\frac{DE}{AE}$	$\frac{AD}{AE}$	$\frac{DE}{AD}$
1.												
2.												
3.												

निष्कर्ष—

(i) क्योंकि $\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$ है, अत: sinA समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयों के साथ नहीं बदलता है।

(ii) क्योंकि $\frac{AB}{AC}$ =....... है, अत: cos A=......है।

(iii) क्योंकि $\frac{BC}{AB}$ =.......है, अत: tan A=.......है।

क्रियाकलाप 41

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

उद्देश्य

मानक त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का सत्यापन करना

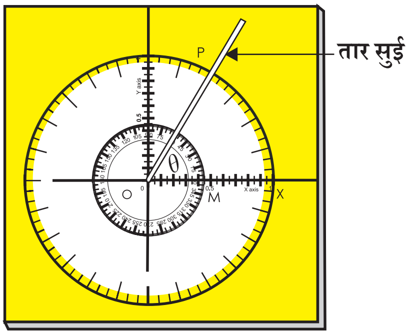
वाँछित सामग्री

इकाई त्रिज्या का वृत्ताकार बोर्ड, तार सुई, सेट स्क्वायर, T-पट्टियाँ, वृत्ताकार बोर्ड के लिए कनेक्टर।

कैसे प्रारंभ करें ?

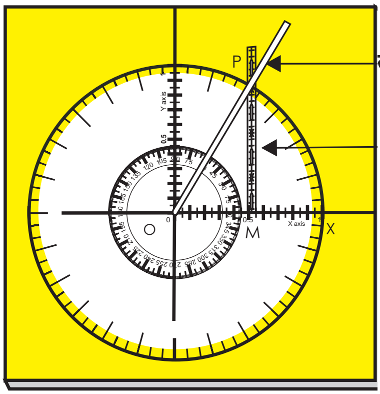
(A) सर्वसमिका $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

1. क्षैतिज रेखा OX के साथ कोण POX=θ बनाने के लिए, इकाई त्रिज्या वृत्ताकार बोर्ड के केंद्र O पर तार सुई लगाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

2. सेट स्क्वायर का प्रयोग करते हुए (जैसे पहले एक क्रियाकलाप में किया था), OX पर लंब PM दर्शाने के लिए एक T-पट्टी लगाइए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. अब, $\sin\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{PM}{1} = PM$

तथा $\cos\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{OM}{1} = OM$

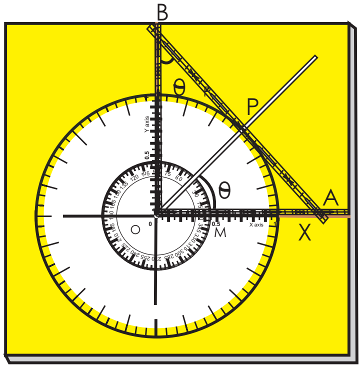
अत: $\sin^2\theta+\cos^2\theta = (PM)^2+(OM)^2$

$= (OP)^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)

या, $\sin^2\theta+co^2\theta = (1)^2 = 1$

(B) सर्वसमिका $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ और $1+\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta$

1. क्षैतिज रेखा OX के साथ कोण POX$=\theta$ बनाने के लिए वृत्ताकार बोर्ड के केंद्र O पर तार सुई लगाइए (जैसे पहले किया था), जैसा कि पिछले पृष्ठ पर आकृति 1 में दर्शाया गया है।
2. बिंदु P पर वृत्ताकार बोर्ड को स्पर्श करती हुई एक T-पट्टी लगाइए तथा एक अन्य T-पट्टी क्षैतिज रेखा OX के अनुदिश लगाइए, जो पहली पट्टी से A पर मिले, जैसा कि पहले किया था।
3. अब एक अन्य T-पट्टी केंद्र O से होकर जाने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश लगाइए, जो पहली T-पट्टी से बिंदु B पर मिले, जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है।



आकृति 3

4. समकोण ΔPOA से,

$$\tan\theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{सलग्न भुजा}} = \frac{AP}{1} = AP$$

$$\text{तथा } \sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सलग्न भुजा}} = \frac{OA}{1} = OA$$

अतः, $1+\tan^2\theta = 1+(AP)^2$

$= (OP)^2+(AP)^2$

$= (OA)^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)

$= \sec^2\theta$

5. समकोण ΔPOB से,

$$\cot\theta = \frac{\text{सलग्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{BP}{1} = BP$$

$$\text{तथा } \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{OB}{1} = OB$$

अतः, $1+\cot^2\theta = 1+(BP)^2$

$= (OP)^2+(BP)^2$

$= (OB)^2$ (पाइथागोरस प्रमेय द्वारा)

$\operatorname{cosec}^2\theta$

क्रियाकलाप 42

ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

उद्देश्य

(i) ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन की अवधारणाओं को समझना।

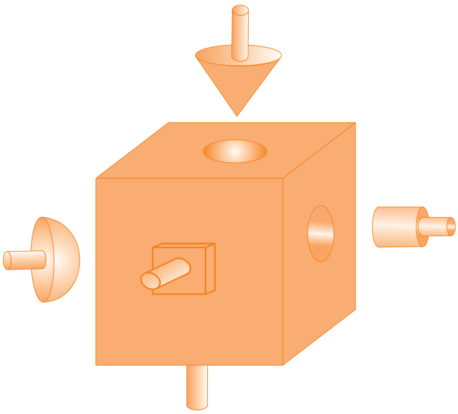
(ii) इस तथ्य का सत्यापन करना कि किसी ठोस के आयतन में वृद्धि अथवा कमी होने पर उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में वही परिवर्तन होना आवश्यक नहीं है।

वाँछित सामग्री

लकड़ी का एक ठोस घन, घन में गड़े हुए घनाभ, लंब वृत्तीय बेलन, लंब वृत्तीय शंकु तथा अर्ध गोले के कट-आउट।

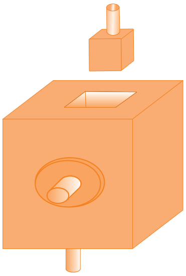
कैसे प्रारंभ करें ?

1. लकड़ी के एक ठोस घन (मान लीजिए भुजा a वाले) में लगे हुए सभी कट-आउट।



आकृति 1

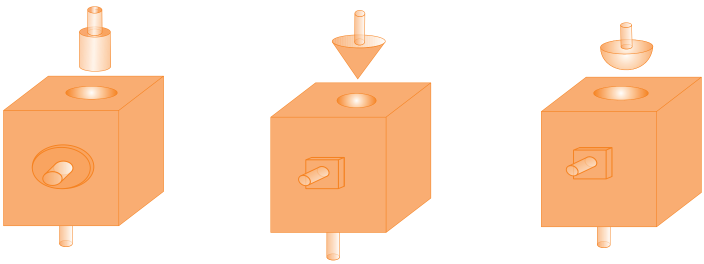
2. घनाभ के कट-आउट (मान लीजिए विमाएँ l, b और h) को घन में से बाहर निकालिए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 2

3. घनाभ के इस कट-आउट का आयतन तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. शेष ठोस, अर्थात् दिए हुए घन में से घनाभ बाहर निकालने के बाद बचे ठोस का आयतन तथा सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA) ज्ञात कीजिए।
5. a, l, b और h के विभिन्न मान लीजिए तथा प्रारंभिक घन और बचे हुए ठोस के आयतनों और पृष्ठीय क्षेत्रफलों में परिवर्तन ज्ञात कीजिए। अब, निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

क्रम सं.	घन		घनाभ		शेष ठोस	
	आयतन a^3	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $6a^2$	आयतन $l\,b\,h$	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $2(lb+bh+hl)$	आयतन a^3-lbh	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $6a^2+2h(l+b)$
1.						
2.						
3.						



आकृति 3

6. एक बेलन, एक श◌ांकु और एक अर्धगोले के कट-आउटों को लेकर भी इसी क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति कीजिए, जैसा कि निम्नलिखित आकृतियों में दर्शाया गया है—

बेलन

मान लीजिए कि बेलन की आधार त्रिज्या r है तथा ऊँचाई h है। निम्नलिखित सारणी को पूरा करने के लिए, r और h के विभिन्न मान लीजिए—

क्रम सं.	घन		बेलन		शेष ठोस	
	आयतन a^3	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $6a^2$	आयतन $\pi r^2 h$	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $2\pi r\,(r+h)$	आयतन $a^3 - \pi r^2 h$	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $6a^2 + 2\pi rh$
1.						
2.						
3.						

शंकु

मान लीजिए कि शंकु के दिए हुए कट-आउट की आधार त्रिज्या r है, ऊँचाई h तथा तिर्यक ऊँचाई l है। निम्नलिखित सारणी को पूरा करने के लिए r, l और h के विभिन्न मान लीजिए—

क्रम सं.	घन		शंकु		शेष ठोस	
	आयतन a^3	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $6a^2$	आयतन $\frac{1}{3}\pi r^2 h$	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $\pi r\,(l+r)$	आयतन $a^3 - \frac{1}{3}\pi r^2 h$	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $6a^2 + \pi r(l - r)$
1.						
2.						
3.						

अर्धगोला

मान लीजिए कि दिए हुए अर्धगोले के कट-आउट की त्रिज्या r है। निम्नलिखित सारणी को पूरा करने के लिए r के विभिन्न मान लीजिए—

क्रम सं.	घन		अर्धगोला		शेष ठोस	
	आयतन a^3	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $6a^2$	आयतन $\frac{2}{3}\pi r^3$	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $3\pi r^2$	आयतन $a^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$	सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $6a^2+\pi r^2$
1.						
2.						
3.						

निष्कर्ष—

(i) शेष ठोस का आयतन कट-आउट ठोस के आयतन की मात्रा के बराबर घट जाता है।

(ii) प्रत्येक स्थिति में, शेष ठोस के पृष्ठीय क्षेत्रफल में ठोस के प्रारंभिक पृष्ठीय क्षेत्रफल की तुलना में वृद्धि हो रही है।

(iii) उपरोक्त प्रेक्षणों से, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि किसी ठोस के आयतन में कमी (वृद्धि) होने पर यह आवश्यक नहीं है कि परिणामी ठोस के पृष्ठीय क्षेत्रफल में भी कमी (वृद्धि) हो।

शैक्षिक किट प्रभाग

DIVISION OF EDUCATIONAL KITS

विद्ययाऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING